



25-8-72

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio   

alchetto

Num.° d'ordine  137

27-11-19

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

2547

NAPOLI

B. Prov

I

2547

608792

GEOMETRIA PRATICA

LA PIANA

OPERA INEDITA

D I

GIUSEPPE ROSATI

PUBBLICO PROFESSORE

CON L'AGGIUNTA DI

GIUSEPPE NICCOLA SPADA

Divisa in due parti

PARTE SECONDA



NAPOLI.

Presso Caggiano e Com.

1833.



...





LA GEODESIA

§. I.

LA DIVISIONE ORDINARIA



Dopo che ci siamo istruiti di tutte le pratiche che si conducono a saper conoscere qualunque lunghezza, e di saper calcolare qualsivoglia superficie in misure quadrate, e di queste rappresentare altresì la pianta in disegno, egli fa d'uopo di conoscere un'altra parte della Geometria Pratica, la quale sviluppa il modo, con cui possiamo dividere una superficie conosciuta che noi diciamo **GEODESIA** ovvero **DIVISIONE**. Questa parte tanto necessaria è stata appunto quella che specialmente abbiamo avuta cura di stabilire tutta intera giacchè la medesima non sappiamo per qual ragione sia stata totalmente trascurata da tutti gli altri Geometri che ci hanno preceduto.

Intanto è a sapersi che una figura qualunque può essere divisa in qualsivoglia modo che a noi piaccia, o come il bisogno lo richiegga. Se le parti, nelle quali resta divisa la figura, abbiano un principio comune, si dice **DIVISIONE ORDINARIA**; se poi queste porzioni sieno poste in diverse situazioni, si dice **DIVISIONE STRAORDINARIA**. Finalmente nelle divisioni qualche volta accade che si tagliano i pezzi stranieri, i quali si debbano calcolare, e le regole adattate a questo maneggio vanno col nome di **INTERSECAZIONE**. Eseguiremo sì fatte pratiche negli articoli seguenti.

1. DATA LA QUADRATURA DI UN PARALLELOGRAMMO ED UN LATO, RITROVARE L'ALTEZZA. Poichè i parallelogrammi possono essere rettangoli ed obbliquangoli, perciò due casi possono accadere.

Fig. 1.

Sia per primo caso il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia la quadratura 6370 ed un lato qualunque AB di 98: si cerca sapere la sua altezza. Poichè questo parallelogrammo è un rettangolo, perciò la sua altezza che si cerca, è la stessa che l'altro lato BD adjacente al conosciuto. Per ritrovarlo si divida la quadratura 6370 per il lato noto 98, ed il quoziente 65 sarà l'altezza o sia il lato adjacente BD. Infatti se questi due lati si moltiplicano tra loro, avremo la medesima quadratura.

Fig. 2.

Sia per secondo caso il parallelogrammo obbliquo AD, del quale si sappia la quadratura 4000, ed un lato qualunque AB, dicendo: si cerca di sapere la sua altezza. Essendo questo parallelogrammo obbliquo, perciò la sua altezza non può essere un lato adjacente al conosciuto, ma deve essere la perpendicolare CE. Per ritrovarla si divida la quadratura 4000 per il lato noto 100, ed il quoziente 40 darà l'altezza CE che si cercava sapere.

2. DATA LA QUADRATURA DI UN TRIANGOLO E LA BASE, RITROVARE L'ALTEZZA. Poichè i tringoli possono essere rettangoli, acutangoli ed ottusangoli, perciò tre casi possono accadere.

Fig. 3.

Sia per primo caso il triangolo rettangolo ABC, del quale si sappia la quadratura 3150 ed un cateto BC di 105: si cerca sapere la sua altezza. Poichè questo triangolo è rettangolo, ed un cateto è conosciuto come una base, perciò la sua altezza sarà quella stessa dell'altro cateto BA che è l'altro lato adjacente al conosciuto. Per ritrovare questa altezza si divida la quadratura 3150 per la metà 52½ della base BC ed il quoziente 60 sarà la lunghezza dell'altro lato o sia l'altezza BA. In fatti moltiplicando la base per la metà dell'altezza avremo la stessa quadratura.

Fig. 4.

Sia per secondo caso il triangolo acutangolo ABC, del quale si sappia la quadratura 1750 e la base BC di 50: si cerca sapere la sua altezza. Perchè questo triangolo è acutangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adjacente alla base, ma deve essere la perpendicolare interna AD. Per ritrovarla si divida la quadratura 1750 per 25, metà della base BC, ed il quoziente 70 sarà l'altezza AD che si voleva.

Fig. 5.

Sia per terzo caso il triangolo ottusangolo ABC, del quale si sappia la quadratura 1200 e la base BC di 40: si cerca di sapere la sua altezza. Poichè si fatto triangolo è ottusangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adjacente alla base, ma deve essere la perpendicolare esterna AD. Per ritrovarla si divida la quadratura 1200 per

20, metà della base BC, ed il quoziente 60 sarà l'altezza AD che si voleva.

3. DATA LA QUADRATURA DI UN CAPOTAGLIATO ED I DUE LATI PARALLELI, RITROVARE L'ALTEZZA. Poichè i capotagliati possono essere rettangoli ed obbliquangoli, perciò due casi possono accadere.

ig. 6. Sia per primo caso il capotagliato rettangolo ABDC, di cui si sappia la quadratura 266, e si sappiano di più i due lati paralleli AB di 10 e CD di 28: si cerca la sua altezza. Poichè questo capotagliato è rettangolo, perciò la sua altezza è la medesima che il lato CA perpendicolare ai due lati paralleli. Per ritrovarla si faccia così. I due lati paralleli AB di 10 e CD di 28 si sommino, ed avremo 38, la cui metà 19 deve dividere la quadratura 266, ed il quoziente 14 sarà l'altezza CA richiesta. In fatti se si moltiplichi la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza, avremo la stessa quadratura.

ig. 7. Sia per secondo caso il capotagliato obbliquangolo ABCD del quale si sappia la quadratura 540 ed i due lati paralleli AB di 24 e CD di 30; si cerca sapere la sua altezza. Poichè questo capotagliato è obbliquangolo, perciò la sua altezza non può essere un lato adjacente ai lati paralleli, ma deve essere AE. Quindi i due lati paralleli AB di 24 e CD di 30 si sommino, ed avremo 54, la cui metà 27 deve dividere la quadratura 540, ed il quoziente 20 sarà l'altezza AE che si voleva.

ig. 8. 4. DATA LA QUADRATURA DI UN CAPOTAGLIATO, LA SUA ALTEZZA ED UN LATO PARALLELO, TROVARE L'ALTRO LATO PARALLELO. Sia il capotagliato ABDC qualunque, del quale si sappia la quadratura 156, la sua altezza AC di 12 ed il lato CD di 18: si cerca sapere l'altro lato parallelo AB. Per trovare adunque il lato AB si faccia così. La quadratura 156 si divida per 6 che è la metà dell'altezza AC di 12, ed avremo per quoziente 26. Da sì fatto numero si sottragga il lato CD di 18, ed il residuo 8 darla lunghezza AB che è l'altro lato parallelo che si cercava. L'altezza AC che divide la quadratura, si dirà lato DIVISORE sempre in appresso.

5. DATO UN PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE IN FORMA TRIANGOLARE. Diciamo esserci noto un rettangolo quando del medesimo sappiamo non solo la quadratura dello spazio superficiale, ma i due lati altresì che l'hanno prodotta. Dippiù la porzione che si cerca tagliare, essendo valutata in quadratura, perciò della medesima si forma un triangolo da tagliarsi

dal parallelogrammo, e questo triangolo dovrà essere rettangolo, il quale avrà i due cateti sopra due lati del parallelogrammo e la ipotenusa che sempre rappresenta quella linea che divide la porzione tolta, si dirà sempre in appresso *DIVISORIA*, la quale incomincia da un angolo del parallelogrammo e termina in un lato. Ora nella risoluzione di questo problema due casi possono accadere o che la porzione da tagliarsi sia minore della metà del parallelogrammo, o che sia maggiore.

Fig. 9.

Sia per primo caso che il parallelogrammo rettangolo AD abbia il lato AB di 100, il lato BD di 70 e la sua quadratura 7000: si cerca tagliare dal medesimo una porzione di quadratura 2000, che è meno della metà, tirando la divisoria dall'angolo B. Ora perchè 2000 è minore della metà di 7000, così noi dal punto B tireremo la divisoria che vada a terminare sul lato AC e costituire un triangolo rettangolo BAE che contenga 2000 di quadratura. Per eseguire tutto questo fa uopo riflettere che noi abbiamo la quadratura 2000 del triangolo da tagliarsi ed il lato noto AB di 100; altro dunque non ci resta a fare che ritrovare la lunghezza dell'altro lato perpendicolare AE, nel cui estremo E cade e termina la divisoria che si tira dal punto B. Quindi divideremo la quadratura 2000 da tagliarsi per 50, metà del lato intero noto AB, ed il quoziente 40 darà la lunghezza AE dell'altro lato o sia l'altezza contata da A in E; onde tirando la ipotenusa BE, la medesima sarà la divisoria che taglia di tutto il parallelogrammo AD la porzione triangolare BAE che si voleva.

Intanto è da avvertirsi che il lato AB che fa il divisore della quadratura da tagliarsi, si dice da noi sempre in appresso *LATO DI APPOGGIO*, il quale sta compreso tra il punto B, d'onde si tira la divisoria, ed il lato AC, nel quale va a terminare la medesima. Ora questo lato AC si dirà sempre in appresso *LATO DELLA INCIDENZA*, e finalmente il punto E dove finisce la divisoria, vien detto *PUNTO DELLA INCIDENZA*.

Fig. 10.

Sia per secondo caso il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia il lato AB di 100, ed il lato BD di 48 e la sua quadratura 4800. Si cerca di tagliare dal medesimo una porzione di quadratura di 3100 maggiore della metà, tirando la divisoria dall'angolo A. Poichè la porzione 3100 da tagliarsi è maggiore della metà del dato parallelogrammo, così se noi stabiliamo AB per lato di appoggio, il lato poi della incidenza non può essere BD, ma sarà DC non adjacente al lato di appoggio; e perciò non potrà stabilirsi da questa parte il taglio triangolare.

7
 Per eseguire adunque questo taglio in forma triangolare faremo così. Poichè tutto il parallelogrammo è di 4800, e la porzione da tagliarsi è di 3100 maggiore della metà, così noi sottraendo l'un numero dall'altro avremo per residuo 1700. Questo residuo taglieremo dall'altra parte, e comechè è minore della metà, così stabiliremo per lato di appoggio AC di 48, e per lato d'incidenza sarà il suo adjacente CD, affinchè tagliando in forma triangolare questo residuo, resti dall'altra parte determinato il quantitativo che si cerca tagliare. Per eseguire tutto questo si divida la quadratura residua 1700 per 24, metà del lato di appoggio AC, ed il quoziente $70\frac{2}{3}$ darà la lunghezza del lato d'incidenza CE; per cui tirando la ipotenusa AE, la medesima sarà la divisoria che stabilisce il termine della quantità enunciata.

Il metodo pratico che noi abbiamo posto in opera per tagliare la descritta porzione, perchè lo abbiamo eseguito dalla parte opposta tagliandone il residuo, perciò il medesimo lo diremo sempre in appresso TAGLIO ALLA ROVESCIA, e del medesimo faremo sempre uso ogni qualvolta le porzioni non possono tagliarsi a dirittura o per la posizione de' lati, o perchè arrecasse del fastidio nel calcolo. Affinchè poi si avesse l'indizio sicuro, onde noi possiamo vedere se una porzione che si voglia tagliare, possa farsi a dirittura sul primo lato di appoggio, cadendo la divisoria sull'adjacente lato d'incidenza, o ci dovessimo servire del taglio alla rovescia, stoccando sull'altro lato di appoggio il residuo, è a considerarsi che dividendo la quadratura da tagliare per la metà del lato di appoggio AB se il quoziente sia meno di tutto BD, allora il lato della incidenza sarà la stessa BD perchè la porzione è meno della metà del parallelogrammo: se poi il quoziente oltrepassi il lato dell'incidenza BD, allora è segno che la porzione da stoccarsi sia più della metà dal parallelogrammo, e perciò il lato della incidenza non può essere BD, ma sarà DC, il quale sta adjacente all'altro lato di appoggio CA comechè tocca il punto A, donde si tira la divisoria, e così sarà mestieri di servirci del taglio alla rovescia. Avvertasi finalmente che i due lati del parallelogrammo che sono uniti ad angolo retto nel punto, donde incomincia la divisoria, i medesimi sono sempre i lati di appoggio come AB, AC e gli altri due lati adjaceti a questi come BD, CD sono i lati rispettivi della incidenza.

6. DATO UN PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO NOTO, TAGLIARE UNA PORZIONE IN FORMA DI CAPOTAGLIATO. Accade un caso di questa guisa ogni qualvolta la quantità che si

vuole tagliare da un parallelogrammo sia maggiore della sua metà e dippiù che non voglia farsi uso del taglio alla rovescia. L'esempio intanto sarà quello, che farà chiaramente comprendere la pratica. Sia il parallelogrammo rettangolo AD, del quale si sappia il lato AB di 116, il lato AC di 110 e tutta la quadratura 12760. Si cerca ora che, dall'angolo A tirando la divisoria, taglisi una porzione di 8000, servendoci di AB per lato di appoggio. Questo e simili casi si risolverebbero col tagliare alla rovescia il residuo 4760 dall'altra parte in forma triangolare ACE, ma noi vogliamo tagliare a dirittura la porzione 8000, la quale essendo maggiore della metà, così non potendo venire in forma triangolare dovrà essere per necessità un taglio fatto a capotagliato. Ora in questo ed in altri casi simili si operi nel modo seguente. Poichè 8000 da tagliarsi dal punto A deve servirsi di AB per lato di appoggio, e la divisoria non potendo cadere nel lato d'incidenza BD, ma nel lato DC, perciò noi appoggiando sul lato AB ci serviremo di BD per lato divisore, ossia vero lato di appoggio, il quale è adjacente al lato AB ed adjacente ancora all'altro lato DC che si stabilisce per lato della incidenza. Quindi la quadratura 8000 si divide per 55, metà del lato vero di appoggio BD, ed avremo per quoziente 145 $\frac{2}{7}$. Da questo quoziente si sottragga il lato di appoggio AB di 116, ed il residuo 29 $\frac{5}{7}$ sarà la lunghezza da contarsi da D in E nel lato della incidenza; per cui tirata AE, la medesima sarà la divisoria richiesta formando il capotagliato ABDE di 8000 che si cercava.

Avvertiamo intanto in questo ed in tutti i casi futuri di taglio eseguito in forma capotagliato da osservarsi la regola generale che il lato il quale serve per divisore della quadratura che si taglia, deve avere da una parte il lato di appoggio e dall'altro il lato dell'incidenza, sopra del quale cade la divisoria.

Gli esempi finora esposti di una porzione di quadratura che si stocca da un parallelogrammo, ci fanno vedere come si fatti tagli possono eseguirsi in modi diversi secondochè portano le circostanze del taglio stesso, o come a noi venisse a grado; ma vogliamo tutte le esposte maniere e qualche altra ancora mostrare in un parallelogrammo il quale venga diviso in moltissime porzioni. L'esempio che siegue, farà conoscere tutti si fatti ingegnosi artificii.

Fig. 12.

7. DIVIDERE UN PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO DA UN PUNTO PRESO IN UN ANGOLO. Sia il parallelogrammo rettan-

golo BD che si debba dividere in 10 porzioni disuguali, ma che tutte queste porzioni debbano cominciare dal punto A che è uno degli angoli del parallelogrammo. Questo punto A, del quale si tirano tutte le linee divisorie, si dirà sempre in appresso punto divisorio. Per dividere adunque questo parallelogrammo dal punto divisorio dato e secondo una data ragione fa d'uopo di prima preparare questo e qualsivoglia altra figura; ed una tale preparazione consiste nel prendere la quadratura della intera figura col fare la necessaria riduzione. Eseguito tutto questo, conosceremo che il lato AB sia di 110, il lato AD di 90 e tutta la quadratura del parallelogrammo 9900. Questa totale quantità si distribuisca in dieci parti ad arbitrio come A di 1000, B di 860, C di 940, D di 1050, E di 800, F di 1100, H di 900, I di 1400 e K di 850, facendo il primo lato di appoggio AB. Vedremo come si facciano questi tagli nel modo seguente.

Per dare ad A la sua porzione 1000, la medesima deve tagliarsi da tutto il parallelogrammo BD; e poichè questa porzione è minore della metà dello stesso parallelogrammo, perciò la taglieremo in forma triangolare, servendoci di AB per lato di appoggio e di BC per lato di incidenza, sopra cui cade la prima divisoria. Quindi la quadratura di questa prima parte 1000 divisa per 55 metà del lato di appoggio AB, il quoziente $18 \frac{2}{11}$ darà la lunghezza BE o sia l'altezza, ovvero l'alzata che si conta dal punto B nel lato d'incidenza, e dipoi tirata la linea AE, questa sarà la divisoria della prima porzione.

Per dare a B la parte 860 si osservi che dovendoci servire del medesimo lato di appoggio AB, così sarà necessario che a questa porzione di B uniamo ancora la porzione di A prima divisa, ed avremo la somma di 1860; e poichè questa somma è anche minore della metà del parallelogrammo, perciò la divisoria caderà nel lato stesso della incidenza BC. Diviso dunque 1860 per 55 metà di AB, il quoziente $33 \frac{2}{11}$ darà la lunghezza BF numerata dal punto B sino ad F; e tirata poi AF, la medesima sarà la divisoria di B, la cui porzione sarà compresa da FEA distinta dalla porzione di A che sta nel triangolo EBA.

Per dare a C la parte 940 perchè ci dobbiamo servire dello stesso lato di appoggio AB, perciò alla parte di C uniremo quella di B e quella di A, e si avrà la somma di 2800; e perchè questa somma è ancora minore della metà del parallelogrammo, perciò la divisoria caderà nello stesso lato d'incidenza BC. Diviso dunque 2800 per 55

metà di AB, il quoziente $50 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza BG contata dal punto B sino a G, e tirata poi AG, la medesima sarà la divisoria di C, la cui porzione viene racchiusa da GFA distinta dalle altre antecedenti.

Per dare a D la sua parte 1050 si rifletta che dovendoci servire dello stesso lato di appoggio AB, perciò sarà d'uopo che alla porzione di D si uniscano ancora le porzioni di C, di B e di A, ed avremo la somma 3850; e perchè si trova questa somma anche minore della metà del parallelogrammo, così la divisoria caderà nel lato stesso BC della incidenza. Si divida adunque 3850 per 55 metà di AB, ed il quoziente 70 darà la lunghezza BH numerata dal punto B sino ad H; e quindi tirata AH, questa sarà la divisoria di D, la cui porzione viene espressa da HGA.

Per dare ad E la sua parte 800 si osservi che dovendo far uso dello stesso lato di appoggio AB, perciò alla porzione di E uniremo quella di D, di C, di B e di A, ed avremo la somma 4650; e perchè questa somma si trova anche minore della metà del parallelogrammo, perciò la divisoria caderà nello stesso lato BC della incidenza. Divideremo dunque 4650 per 55 metà del lato di appoggio AB, ed il quoziente $84 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza BI contata dal punto B sino ad I; e perciò tirata AI, la medesima sarà la divisoria di E, la cui porzione viene compresa dal pezzo IHA distinto da tutti gli altri tagli di anzi eseguiti.

Tutti i tagli fin qui eseguiti sono stati tutti poggiati sopra il lato AB, ed hanno avuto il medesimo lato d'incidenza BC unito al primo nell'angolo B. Questi tagli si sono succeduti l'un l'altro progressivamente, sommando sempre insieme le porzioni divise con l'altra da dividersi finchè si è arrivato nel punto I in dove la somma delle cinque porzioni unite è ancora minore della metà del parallelogrammo. Questo progressivo modo di tagliare le porzioni fatto nella prima metà del parallelogrammo si dice DIVISIONE A DIRITTURA perchè sempre riconoscono il primo lato di appoggio AB ed il primo lato d'incidenza BC. Arrivato a questo termine, se noi aggiungeremo alla somma di tutti e cinque i tagli fatti l'altra porzione di F di 1100, allora la somma 5750 sarà maggiore della metà del parallelogrammo; perciò non potendo più essere BC il lato della incidenza, non potremo neppure servirci di AB per quello di appoggio, giacchè per questa quantità maggiore 5750 dovendosi anche dividere dal punto divisorio A, la linea divisoria caderà necessariamente nel lato CD. Quindi ritrovandosi in questo caso noi esporremo differenti modi

come tagliare le altre porzioni nella seconda metà del parallelogrammo, ed il primo sarà il modo seguente.

Per dare ad F la porzione 1100 si rifletta che sommando insieme questa parte di F con quelle di tutte le antecedenti di A, di B, di C, di D, di E avremo la somma 5750; e poichè questa è maggiore della metà del parallelogrammo, perciò non potremo tagliarla più in forma triangolare, giacchè la divisoria non cade più nel lato BC, ma dovremo tagliarla in forma di capotagliato, servendoci per lato divisore BC e per lato d'incidenza CD. L'artificio adunque consiste che tutta la quadratura da tagliarsi 5750 deve rappresentare un capotagliato, del quale sappiamo l'altezza BC ed un lato BA, e non dobbiamo far altro che ritrovare l'altro lato parallelo. Quindi divideremo 5750 per 45 metà di BC, ed avremo per quoziente 127 $\frac{2}{3}$; da questo quoziente si sottragga il lato BA di 110 ed il residuo 17 $\frac{2}{3}$ darà la lunghezza CK che è l'altro lato parallelo del capotagliato che si numera da C in K, e tirata poi AK, la medesima sarà la divisoria per la porzione di F compresa dal pezzo KCIA.

Per dare a G la sua parte 1000, noi uniremo questa parte di G a tutte le antecedenti, di F, di E, di D, di C, di B e di A, ed avremo la somma 6750 da tagliarsi anche in forma di capotagliato. Quindi si divide il numero 6750 per 45 metà del lato BC e dal quoziente 150 si sottragga il lato BA di 110, ed il residuo 40 darà la lunghezza CL contata da C sino ad L, e poi tirata AL, la medesima sarà la divisoria per la porzione di G contenuta nella figura LKA.

Per dare ad H la porzione 900 si faccia così. Si uniscano a questa porzione tutte le antecedenti, ed avremo una somma di 7650 da tagliarsi nel modo istesso. Diviso adunque 7650 per 45 metà del lato BC, avremo per quoziente 170, dal quale sottratto 110 del lato BA il residuo 60 darà la lunghezza CM contata da C in M; tirata poi AM, questa sarà la divisoria per la parte di H la quale è racchiusa da MIA.

Per dare ad I la sua porzione 1400 ci si faccia la stessa operazione. Si unisca a questa la somma di tutte le altre antecedenti e si avrà 9050 da tagliarsi. Quindi dividendo sì fatto numero 9050 per 45 metà del lato BC, avremo per quoziente 201 $\frac{1}{3}$; dal quale sottratto 110 del lato BA, il residuo 91 $\frac{1}{3}$ sarà la lunghezza CN dell'altro lato parallelo contato da C sino ad N; per cui tirata AN, la medesima sarà la divisoria per la porzione di I che si contiene da NMA. Arrivato a questo termine, ci resta il pezzo

DNA di 850 che è l'ultima porzione spettante a K, e così termineremo tutta l'operazione.

Il metodo come abbiamo diviso questa seconda metà del parallelogrammo per situare nel di loro ordine tutte le altre porzioni che sieguono a quelle contenute nella prima metà del medesimo parallelogrammo, poichè ne abbiamo tagliato in forma di capotagliato, perciò questo modo da fare i tagli nella seconda metà del parallelogrammo si dice *DIVISIONE A CAPOTAGLIATO*. Noi intanto non brigandoci più di quei tagli fatti nella prima metà del parallelogrammo, faremo vedere come questi altri tagli nella seconda metà dello stesso parallelogrammo si possono eseguire di un'altra maniera, e ripiglieremo il calcolo dalla porzione di F facendo nel modo seguente.

Nella prima metà CBA del parallelogrammo si sono potute situare cinque porzioni di A, di B, di C, di D e di E con la divisione a dirittura, giacchè tutte queste sono poggiate sopra il lato BA di appoggio ed hanno avuto BC per lato d'incidenza. Dovendo ora situare appresso delle medesime la porzione di F di 1100, se questa si unisca alle cinque prime, avremo una somma di 5750, la quale oltrepassa la metà del parallelogrammo; perciò non può essere tagliata a dirittura, ma dovremo usare un altro artificio dicendo così. Tutto il parallelogrammo è di 9900, e perchè le cinque porzioni tagliate e contenute nel pezzo IBA fanno la somma di 4650, così sottratto questo da tutto l'intero, avremo per resto 5250 che si contiene nel pezzo ICDA. Per tagliare adunque la porzione di F di 1100 che deve situarsi a fianco di quella di E. noi faremo così. Perchè la divisoria per F cade nel lato CD, perciò noi ci serviremo di AD per lato di appoggio e di DC per quello d'incidenza. Si sottragga da questo pezzo 5250 la porzione 1100 di F, ed il resto 4150 si divida per 45 metà di AD, ed il quoziente $92 \frac{2}{3}$ darà la lunghezza di DK contata da D sino a K, e tirata AK, questa sarà la divisoria per F, la cui porzione resta compresa in KCIA, restando il pezzo KDA di 4150 per uso delle altre porzioni. Dunque con questo taglio eseguito a questo modo non abbiamo fatto altro che lasciare la porzione di F a fianco della porzione di E e stoccare il resto del pezzo col taglio KDA come è chiaro a capirsi.

Per dare a G la sua parte 1000 perchè tutto il pezzo KDA è di 4150, perciò da questo toglieremo il numero 1000 e l residuo 3150 lo divideremo per 45 metà di AD, ed il quoziente 70 darà la lunghezza DL numerata da D in L, e

tirata AL, la medesima sarà la divisoria di G, la cui porzione resta chiusa in LKA, restando il pezzo LDA stoccato di 3150 per servire alle altre porzioni.

Per dare ad H la sua parte 900 noi ne abbiamo 3150 nel pezzo LDA: per cui da questo tagliandone la parte di H di 900 ci resta l'avanzo 2250. Questo numero si divide per 45 metà di AD, ed il quoziente 50 darà la lunghezza DM contata da D in M, e tirata AM, questa sarà la divisoria di H, la cui parte è compresa in MLA, restando il pezzo MDA di 2250 che serve per le seguenti porzioni.

Per dare ad I la sua porzione 1400 perchè ne abbiamo 2250 nel pezzo MDA, perciò da questo togliendone la parte di I di 1400, ci resta l'avanzo 850. Si divide questo avanzo 850 per 45 metà di AD, ed il quoziente 18 8/9 darà la lunghezza DN contata da D in N e tirata AN la medesima sarà la divisoria di I, la cui porzione sarà compresa in NMA restando l'avanzo DNA di 850 che è l'ultima porzione di K e così termineremo tutta la distribuzione delle date porzioni.

Quest'altra maniera onde noi abbiamo stoccate quelle porzioni che entrano nella seconda metà del parallelogrammo per situarle in sequela delle prime poichè le abbiamo tagliate sempre retrocedendo, perciò quest'altro metodo si dice **DIVISIONE ALLA ROVERSCIA**. Esporremo intanto un altro modo come situare le stesse porzioni che entrano in questa seconda metà del parallelogrammo, e lo faremo con l'artificio seguente.

Dopochè con la divisione a dirittura abbiamo tagliate cinque porzioni di A, di B, di C, di D e di E, e siamo arrivati ad occupare quasi la prima metà del parallelogrammo, per situare poi la porzione di F la detta metà non può contenerla; per cui si deve lasciare il lato di appoggio AB perchè quello d'incidenza non può essere più BC, ma deve essere CD. Quindi nella seconda metà del parallelogrammo essendo il lato d'incidenza CD, dovrà essere AD quello di appoggio perchè tocca il punto A divisorio. Ora invece di continuare l'ordine delle porzioni in sequela delle prime e proseguire con la porzione di F, noi faremo di quest'altro modo. Dopo di essere giunto sino ad I per la parte di E invece di situare F appresso noi la lasceremo e principieremo dall'ultima porzione che è K di 850, situandola sopra il lato di appoggio AD e quello d'incidenza DC, continuando i tagli con l'ordine retrogrado finchè resti la porzione di F compresa tra i primi ed i secondi tagli, e tutto ciò sarà eseguito nel modo seguente.

Lasciando di tagliare la parte di F in ordine delle cinque prime porzioni terminate in I noi principieremo dall' ultimo K di 850 stocchandola sopra AD come lato di appoggio, e servendoci di DC come lato d' incidenza. Dunque la porzione di K di 850 si divida per 45 metà di AD, ed il quoziente $18 \frac{2}{3}$ darà la lunghezza DN contata da D in N, e tirata AN, questa sarà la divisoria per K, la cui porzione è contenuta da DNA.

Per dare ad I la sua porzione 1400 perchè ci dobbiamo servire dello stesso lato di appoggio AD, perciò uniremo la parte di K e la parte di I ed avremo la somma 2250, la quale divisa per 45 metà di AD, il quoziente 50 darà la lunghezza DM numerata da D in M, e tirata poi AM, questa sarà la divisoria di I, la cui porzione è compresa in NMA.

Per dare ad H la sua parte 900 si sommino insieme la parte di H, di I, di K, e la somma 3150 si divida per 45 metà di AD, ed il quoziente 70 darà la lunghezza DL contata da D in L, e tirata AL, questa sarà divisoria di H, la cui parte viene chiusa nel pezzo MIA.

Per dare a G la porzione 1000 si uniscano insieme la parte di G, di H, di I, di K, e la somma 4150 si divida per 45 metà di AD, ed il quoziente 92 $\frac{2}{3}$ darà la lunghezza DK numerata da D sino a K, e tirata poi AK, la medesima sarà la divisoria di G, la cui porzione racchiusa in LKA. Eseguito così tutto questo, resterà lo spazio KCIA di 1100 compreso tra questi ultimi tagli ed i primi, e questo spazio per appunto sarà la porzione di F, ed in questo modo avremo terminata la divisione delle parti del dato parallelogrammo.

Questo ultimo metodo che abbiamo esposto per situare le porzioni spettanti alla seconda metà del parallelogrammo incominciando i tagli dalla ultima porzione per andare poi ad incontrare i primi, si dice DIVISIONE A RITORNO, giacchè col cammino retrogrado si va ad incontrare le prime divisioni.

Fig. 13.

8. DIVIDERE UN PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO DA UN PUNTO PRESO IN UN LATO. Sia il parallelogrammo rettangolo BE che debba dividersi in sei porzioni disuguali, ma che tutte queste porzioni debbano cominciare dal punto A preso in uno dei lati CE. Per dividere adunque questo parallelogrammo dal punto divisorio dato e secondo una data ragione egli fa mestieri di prima preparare sì fatta figura, facendo così. Dal punto divisorio A si tiri la linea occulta AF in modo che sia perpendicolare al lato CE; perciò in questo punto divisorio si formano due angoli retti. Fatto questo, tutto il parallelogrammo BE resta diviso

dalla occulta AF in due parallelogrammi minori AB, AD dei quali bisogna sapere le quadrature. Si misuri il lato BC di 40, la parte CA di 12 e la parte AE di 30, donde conosceremo che la quadratura di AB sarà 480 e la quadratura di AD di 1200 e che sommate insieme saranno 1680 per la totale quadratura di tutto il parallelogrammo BE. Dippiù egli è da sapersi che essendo A il punto divisorio, dal medesimo dobbiamo sempre concepire tirarsi le linee rette AC, AF, AE disposte tra di loro in maniera che in A formino gli angoli retti; per cui ciascheduna di queste rappresenterà un lato di appoggio. Finalmente conosciuta così la disposizione dei lati di appoggio sempre tirati ad angolo retto dal punto divisorio, e calcolata la quadratura totale e perpendicolare della figura data, si distribuiscano le sei porzioni in quella ragione che si vuole, in modo che A sia di 200, B di 300, C di 480, D di 320, E di 180 ed F di 200, e che la linea AE sia il primo lato di appoggio,

Per dare ad A la porzione 200 la medesima deve tagliarsi dal pezzo AD; e poichè questa porzione è minore della metà dello stesso pezzo AD, perciò la taglieremo in forma triangolare servendoci del lato di appoggio AE e di quello di incidenza ED, sopra del quale cade la prima divisoria. Quindi la quadratura di questa prima porzione 200 divisa per 15 metà del lato di appoggio AE, il quoziente $13\frac{1}{3}$ darà la lunghezza EG contata dal punto E nel lato d'incidenza, e tirata poi la linea AG, la medesima sarà la divisoria di A che è la prima porzione.

Per dare a B la parte 300 si osservi che dovendoci servire del medesimo lato di appoggio AE, così sarà necessario che a questa porzione di B uniamo ancora la porzione di A prima divisa, ed avremo la somma 500; e poichè questa somma è anche minore della metà del pezzo AD, così la divisoria caderà nel lato stesso d'incidenza ED. Diviso dunque 500 per 15 metà di AE, il quoziente $33\frac{1}{3}$ darà la lunghezza EH numerata dal punto E sino ad H, e tirata poi AH, la medesima sarà la divisoria di B, la cui porzione sarà compresa da AHG, distinta dalla porzione di A nel triangolo AGE.

Per dare a C la porzione di 480 si rifletta che dovendo essere AE il lato di appoggio, perciò uniremo in una somma la parte di A, la parte di B e la parte di C ed avremo 980; e poichè questo numero è maggiore della metà del pezzo AD, perciò non potremo tagliarlo in forma triangolare, giacchè la divisoria non cade nel lato ED;

ma dovremo tagliarlo in forma di capotagliato servendoci per lato divisore ED e per lato d'incidenza DF. Quindi divideremo 980 per 20 metà di ED ed avremo per quoziente 49. Da questo quoziente si sottragga il lato AE di 30, ed il residuo 19 darà la lunghezza DI che è l'ultimo lato parallelo del capotagliato e che si numera da D in I, e tirata poi AI, la medesima sarà la divisoria per la porzione di C compresa nella figura AIDH. Ora qui egli è da osservarsi che tutte le porzioni che sono cadute nel pezzo AFDE hanno avuto sempre AE per lato di appoggio, ma le altre porzioni che caderanno nell'altro pezzo AFBC dovranno avere per lato di appoggio AF che è l'altra linea tirata nel punto divisorio che fa angolo retto col primo lato di appoggio. Ben inteso questo, egli è d'avvertirsi che la porzione di A, di B e di C unite insieme essendo 980 ed essendo il pezzo AD di 1200, ci resta un residuo di 220 compreso nel triangolo AFI il quale deve entrare in quell'altra porzione che si taglia dall'altro pezzo AB.

Per dare a D la porzione 340 si consideri che noi abbiamo nel pezzo AD un residuo AFI di 220; per cui il di più 100 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo AB servendoci di AF per lato di appoggio. Ora poichè 100 è minore della metà del pezzo AB, così il lato della incidenza sarà FB adjacente al lato di appoggio. Quindi dividendo 100 per 20 metà di AF, il quoziente 5 darà la lunghezza FK contata da F sino a K; per cui tirata AK la medesima sarà la divisoria per la porzione di D compresa da tutto il triangolo AKI.

Per dare ad E la porzione 180 si osservi che dovendo essere AF il lato di appoggio, noi uniremo in una somma la porzione AFK di 100 e la porzione di E di 180 ed avremo in tutto 280, ma perchè questa somma è maggiore della metà di AB, perciò non potremo tagliarla in forma triangolare perchè la divisoria non cade nel lato FB, ma cade nel lato BC; per cui dovremo tagliarla in forma di capotagliato, servendoci di FB per lato divisore e di BC per lato d'incidenza. Quindi dividendo 280 per 6 metà di FB, avremo per quoziente $46\frac{2}{3}$ dal quale sottraendo FA di 40, il residuo $6\frac{2}{3}$ darà la lunghezza BL numerata da B in L che è l'altro lato parallelo del capotagliato; per cui tirata AL la medesima sarà la divisoria per la porzione di E. Il resto LCA del pezzo AB sarà la porzione ultima di F di 200, e così termina tutta l'operazione.

Egli è qui d'avvertirsi che dopo di avere così divisa una figura fa d'uopo che se ne faccia la pruova calcolando

ciascheduna porzione in particolare per indi conoscere se la somma di tutte le medesime si uguaglia alla intera quadratura di tutta la data figura.

9. DIVIDERE UN PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO DA UN PUNTO PRESO NELLO SPAZIO. Sia il parallelogrammo rettangolo BDEC da dividersi in sette porzioni comunque disuguali, ma che il punto divisorio A sia in un luogo qualunque del suo spazio. Per eseguire tutto questo sarà necessario di intendere la seguente cosa. Nel punto divisorio A si concepisca sempre posto lo squadro, le cui linee visuali dei quadranti sono rappresentate dalle due occulte FG, HI, le quali si intersecano nell'asse dello strumento in quattro angoli retti in A e che si dice la croce dello squadro e che formano perciò quattro linee rette AI, AG, AH, AF, che sono le quattro quadranti. Queste sono quelle medesime quattro linee che servono sempre per lato di appoggio ciascheduna a suo luogo. E queste istesse quattro linee sono altresì quelle che dividono il parallelogrammo in quattro parallelogrammi minori AC, AB, AD, AE.

Ben inteso tutto questo, si misurino i lati necessari per così ritrovare la quadratura di ogni parallelogrammo minore, la quale si noti nel mezzo di ciascheduno, ovvero a fianco, e poi la loro somma 2000 sarà la quadratura di tutto il parallelogrammo. Finalmente di questa totale quadratura se ne debbono fare sette porzioni, e sarà A di 230, B di 100, C di 320, D di 280, E di 360, F di 220 e G di 490, facendo il primo lato di appoggio AI, una delle quadranti.

Per dare ad A la porzione 230, poichè la medesima è maggiore della metà del pezzo AE, così non potrà essere tagliata a triangolo, ma dovrà eseguirsi in forma di capotagliato. Quindi lasciando il primo lato di appoggio AI ci serviremo per lato divisore di IE, e sarà poi EG il lato d'incidenza. Si divida dunque 230 per 15 metà di IE ed avremo per quoziente $15 \frac{1}{3}$, dal quale sottratto AI di 15, il residuo $\frac{1}{3}$ darà la lunghezza EK, e tirata AK la medesima sarà la divisoria per la porzione di A.

Per dare a B la porzione 100, perchè questa anche cade nel primo pezzo, e dovendoci servire del medesimo lato divisore IE come che viene eseguita in forma di capotagliato, così uniremo la parte di A e di B, ed avremo la somma 330. Dividendo dunque 330 per 15 metà di IE avremo per quoziente 22, dal quale sottratto il lato AI di 15, il residuo 7 darà la lunghezza EL nel lato di

incidenza, e tirata poi AL, questa sarà la divisoria per la parte di B. Avvertasi in questo luogo che avendo tagliata la parte di A e di B dal primo pezzo AE, del medesimo ci è rimasto il residuo triangolare AGL di 120, il quale farà parte della porzione che siegue. Dippiù tutte le porzioni che caderanno nell'altro pezzo AD, avranno per lato di appoggio AG, che è l'altra linea della croce dei quadranti. In generale avvertiamo che i lati di appoggio per qualsivoglia divisione debbano essere sempre ed in ogni caso la linea della croce dei quadranti dello squadro.

Per dare a C la porzione 320 si osservi che noi abbiamo nel primo pezzo AE un residuo triangolare AGL di 120; perciò dobbiamo prendere dal pezzo susseguente AD il dippiù 200, e sarà la linea dei quadranti AG il lato di appoggio. Inoltre essendo 200 minore della metà di questo pezzo AD, la divisoria caderà nel lato della incidenza GD, ed il taglio sarà in forma triangolare. Diviso adunque 200 per 15 metà di AG, il quoziente $13 \frac{2}{3}$ darà la lunghezza GM contata da G in M, e tirata poi AM, la medesima sarà la divisoria per C, la cui porzione viene compresa da tutto AML.

Per dare a D la porzione 280, perchè il lato di appoggio è AG, così uniremo quella parte di C che è compresa solo da AGM e la parte di D, ed avremo 480, la quale somma essendo maggiore della metà del pezzo AD, perciò non possiamo tagliarla in forma triangolare, ma dovrà essere in forma di capotagliato. Quindi è che lasceremo il lato di appoggio AG e ci serviremo di GD per lato divisore. Diviso adunque 480 per 12 $\frac{1}{2}$ metà di GD, avremo per quoziente $38 \frac{2}{3}$, dal quale sottratto AG, il residuo $8 \frac{2}{3}$ darà la lunghezza DN nel lato d'incidenza; perciò tirata AN, la medesima sarà la divisoria per D, la cui porzione è compresa da ANDM. Fatto questo, dal pezzo AD ci avanza il residuo triangolare AHN di 270, il quale entra a far parte dell'altra porzione che si taglia nell'altro pezzo AB.

Per dare ad E la porzione 360 si osservi che noi abbiamo un residuo 270 nel pezzo AD; perciò il dippiù 90 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo AB, e sarà AH il lato di appoggio ed HB il lato d'incidenza, giacchè 90 è minore della metà di questo pezzo. Diviso dunque 90 per 12 $\frac{1}{2}$ metà del lato di appoggio AH, il quoziente $7 \frac{1}{2}$ darà la lunghezza HO; perciò tirata AO, la medesima sarà la divisoria per E compresa nel triangolo AON.

Per dare ad F la porzione 220, poichè il lato di appoggio è AH una delle linee dei quadranti, perciò uniremo

quel quantitativo di E che è racchiuso dal solo AHO ed il quantitativo di F ed avremo 310, il quale perchè è maggiore della metà del pezzo AB, così è chiaro che non potendo venire il taglio triangolare deve essere a capotagliato; per cui lasciando il lato di appoggio AH ci serviremo per lato divisore di HB, e sarà BF il lato d'incidenza. Ora dividendo 310 per 10 metà di HB avremo 31 per quoziente, dal quale sottratto AH, il residuo 6 darà la lunghezza BP; e tirata poi AP, la medesima sarà la divisoria per F, la cui porzione viene compresa da AOBP. Finalmente il resto PAIC di 490 sarà la porzione di G come è chiaro a conoscersi.

Questi problemi di divisione ci fanno essere nella speditezza di saper dividere qualsivoglia parallelogrammo rettangolo. Avvertiamo intanto che queste divisioni e tutte quelle che seguiranno, sono fatte tutte da un punto giacchè a suo luogo esporremo la pratica di saper adattare in questo punto uno sfogo comune. Entriamo al presente a vedere come possa eseguirsi la divisione delle figure triangolari e dei trapezii ad angoli sporgenti.

Fig. 15. 10. DATO UN TRIANGOLO RETTANGOLO, RITROVARNE UN ALTRO UGUALE SIA OTTUSANGOLO SIA ACUTANGOLO. Sia il triangolo ABC rettangolo in B. Si cerca sopra la stessa base AB stabilire un altro triangolo sia ottusangolo, sia acutangolo, ma che sia in valore uguale al dato triangolo rettangolo. Per ritrovare un triangolo ottusangolo uguale al dato si faccia così. Si tiri dal punto B la indefinita BD la quale faccia con AB qualsivoglia angolo ottuso ABD; indi dal vertice C si tiri CE parallela alla base AB; e poichè CE interseca BD nel punto E, così da questo punto si tiri la retta EA, ed il triangolo ottusangolo EAB sarà uguale al rettangolo CAB. La ragione è manifesta, perchè i triangoli che hanno la stessa base e sono posti tra le stesse parallele, i medesimi sono uguali tra loro.

Per ritrovare un triangolo acutangolo uguale al triangolo rettangolo dato si faccia così. Si tiri da B la retta indefinita BG che faccia con AB qualsivoglia angolo acuto GBA; dipoi dal vertice C si tiri CF parallela alla base AB; e perchè CF interseca BG nel punto F, così da questa intersecazione si tiri la retta FA, ed il triangolo acutangolo FAB sarà uguale al triangolo rettangolo CAB. La ragione è manifesta, essendo la stessa dell' antecedente.

11. DIVIDERE UN TRIANGOLO OBLIQUANGOLO FACENDO PER PUNTO DIVISORIO UN ANGOLO E PER LATO DI APPOGGIO LA BASE. In tutte le divisioni fatte nei parallelogrammi rettangoli i

tagli che abbiamo eseguiti in forma triangolare, hanno avuto la opportunità di avere il lato di appoggio per base ed il lato d'incidenza per altezza, la quale deve sempre essere perpendicolare alla base, ed in conseguenza questi tagli sono stati sempre triangoli rettangoli. Quando poi le figure da dividersi fossero tutto altro, come accade nei triangoli obbliquangoli e nei trapezii, allora sebbene questi tagli in forma triangolare avessero per base il lato di appoggio, il lato della incidenza però non è perpendicolare al primo ma è obliquo, ed il quale può essere o approssimante o sfuggente, ed allora l'altezza ritrovata col calcolo non potrà adattarsi e numerarsi sul medesimo lato giacchè deve essere sì fatta altezza necessariamente perpendicolare alla base. Intanto ritrovandoci in un caso di questa guisa, noi esporremo un artificio onde ritrovare dove si possa adattare l'altezza calcolata sopra il lato obliquo della incidenza. E poichè questo lato obliquo può essere approssimate al lato di appoggio, ovvero sfuggente, così due casi possono accadere.

Fig. 16. Sia per primo caso il triangolo CBA da dividersi in quattro porzioni disuguali, facendo nell'angolo A il punto divisorio e la base AB per lato di appoggio. Sia intanto la base AB di 44 e l'altezza CD di 44; per cui la sua quadratura sarà 968 da doversi dividersi in quattro porzioni, delle quali A sia di 300, B di 210, C di 240 e D di 218, essendo BA il lato di appoggio ed il lato obliquo approssimante BC quello della incidenza.

Per dare ad A la sua porzione 300 si rifletta che essendo BA il lato di appoggio, dovrà essere BC il lato della incidenza; e poichè questi due lati non si uniscono in B ad angolo retto, ma sono tra di loro obliqui approssimanti, perciò la porzione 300 che dobbiamo prendere, la taglieremo a triangolo rettangolo e poi ritroveremo un triangolo acutangolo ovvero ottusangolo, come accaderà, e che sia uguale alla quantità che si taglia. Quindi dividendo 300 per 22 metà di AB, avremo per quoziente 17 $\frac{1}{2}$. Ora dovendo situare la lunghezza di questo quoziente e non potendo numerarla sopra il lato d'incidenza BC perchè obliquo, ma lo dobbiamo contare a perpendicolo sopra il lato di appoggio BA, noi faremo così. Dall'estremo B del lato di appoggio innalzeremo la perpendicolare occulta BE lunga 13 $\frac{1}{2}$ che si dirà sempre in appresso l'ALZATA e poi dal punto E tireremo l'altra perpendicolare occulta EF che si dirà sempre in appresso la PARALLELA perchè

sempre sarà parallela al lato di appoggio. Questa parallela determina in F il punto dell'incontro nel lato d'incidenza; per cui tirata AF, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A che è compresa nel triangolo BFA. Avvertasi intanto in questo luogo che l'alza BE, perchè è fuori del triangolo, perciò si chiama ALZATA ESTERNA.

Finalmente la ragione di questa operazione è manifesta. Imperciocchè se finciamo tirata una linea EA, avremo un triangolo rettangolo EAB, il quale sarà uguale al triangolo obbliquo BFA, perchè poggiano sopra la stessa base BA e sono compresi tra due parallele EF, BA. Per dare a B la sua parte 210, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio BA e del medesimo lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A e la parte di B ed avremo la somma 510. Diviso adunque 510 per 22 metà di AB, avremo per quoziente $23\frac{1}{2}$. Quindi dall'estremo B tireremo l'alzata esterna BG di $23\frac{1}{2}$ e poi dal punto G tireremo la parallela GH, la quale tocca in H il lato d'incidenza, e finalmente tirata AH, la medesima sarà la divisoria per B, la cui porzione viene racchiusa nel triangolo HFA.

Per dare a C la porzione 240, poichè ci serviremo del medesimo lato di appoggio BA, e dello stesso lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, di B e di C, ed evremo la somma 750. Questa somma divisa per 22 metà del lato di appoggio darà un quoziente $34\frac{1}{2}$ perciò facendo tanto lunga l'alzata esterna BI tirata dall'estremo B e poi tirata la parallela IK, avremo il punto dell'incontro K nel lato obbliquo d'incidenza, e poi tirata AK, questa sarà la divisoria per la parte di C la quale si contiene nel triangolo KHA. Finalmente il resto CKA di 218 della intera figura sarà la porzione di D come è chiaro a conoscersi.

Sia per secondo caso il triangolo CBA da dividersi in quattro porzioni disuguali, facendo nell'angolo A il punto divisorio e la base AB per lato di appoggio. Sia intanto questa base AB di 46 e l'altezza CD di 44; per cui la sua quadratura sarà 1012 da doversi dividere in quattro porzioni, delle quali A sia di 190, B di 260, C di 210 e D di 352, essendo BA il lato di appoggio, ed il lato obbliquo sfuggente BC quello della incidenza.

Per dare ad A la sua porzione 190 egli è a ricordarsi che essendo BA il lato di appoggio, dovrà essere BC il lato della incidenza, e poichè questi due lati non si uniscono in B ad angolo retto, ma sono tra loro obliqui sfuggenti, perciò noi la porzione 190 che dobbiamo pren-

dere, la taglieremo a triangolo rettangolo e poi ritroveremo un triangolo ottusangolo, ovvero acutangolo come accaderà e che sia uguale alla quantità che si taglia. Divideremo adunque 190 per 23 metà di AB, ed avremo per quoziente $8\frac{2}{3}$. Ora dovendo fissare la lunghezza di questo quoziente e non potendo numerarlo sopra il lato d'incidenza BC, perchè obbliquo, ma la dobbiamo contare a perpendicolo sopra il lato di appoggio BA, perciò faremo così. Dall'estremo B del lato di appoggio s'innalzi la perpendicolare occulta BE lunga $8\frac{2}{3}$ e che sarà l'alzata, e poi dal punto $8\frac{2}{3}$. Ora dovendo fissare la lunghezza di questo quoziente la parallela la quale determina in F il punto dell'incontro nel lato d'incidenza; per cui tirata AF, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A che è compresa nel triangolo AFB. Avvertasi in questo luogo che l'alzata BE perchè è dentro del triangolo, perciò si dice ALZATA INTERNA. Finalmente la ragione di questa pratica è manifesta. Imperciocchè se fingiamo tirata una linea EA, avremo un triangolo rettangolo EBA il quale sarà uguale al triangolo obbliquangolo BFA, perchè poggiamo sopra la stessa base BA e sono racchiusi tra due parallele EF, AB.

Per dare a B la sua parte 260, poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio BA e del medesimo lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A e la parte di B, ed avremo la somma 450. Diviso adunque 450 per 23 metà di BA, avremo per quoziente $19\frac{1}{2}$. Quindi dall'estremo B, tireremo l'alzata interna BG di $19\frac{1}{2}$, e poi dal punto G tireremo la parallela GH la quale tocca in H il lato d'incidenza e finalmente tirata AH, la stessa sarà divisoria per B, la cui porzione è racchiusa nel triangolo HFA.

Per dare a C la porzione 210 poichè ci serviremo del medesimo lato di appoggio BA e dello stesso lato obbliquo d'incidenza BC, così uniremo la parte di A, di B e di C ed avremo la somma 660. Questa somma divisa per 23 metà del lato di appoggio darà per quoziente $28\frac{2}{3}$; per cui facendo tanto lunga l'alzata interna BI tirata dall'estremo B e poi tirata la parallela IK, avremo il punto dell'incontro K nel lato obbliquo d'incidenza, e poi tirata AK, la medesima sarà la divisoria per la parte di C, la quale si contiene nel triangolo KIA. Finalmente il resto CKA, di 352 dell'intera figura sarà la porzione di D come è chiaro a capirsi.

12. DATO UN CAPOTAGLIATO RETTANGOLO O QUALSIVOGLIA ALTRO TRAPEZIO QUATRI LATERO CHE ABBA UN ANGOLO RETTO,

3. 18.

TERMINARLO IN TRIANGOLO E CALCOLARNE TUTTO LO STRANIERO TANTO NE' LATI QUANTO NELLA QUADRATURA. Sia in primo luogo il capotagliato rettangolo EABD, del quale si sappia il lato AB di 60, il lato AE di 40 ed il lato BD di 25, Poichè i due lati AB, ED sono convergenti verso B e D, perciò distesi i medesimi si uniranno nel punto C della convergenza e costituiscono il gran triangolo rettangolo EAC, del quale la porzione DBC è tutta straniera. Si cerca ora di sapere col calcolo il residuo straniero BC di tutto il cateto AC, dippiù la perpendicolare BD e finalmente tutta la quadratura straniera DBC.

Primieramente per sapere la lunghezza straniera BC si faccia così. Dal punto D si tiri la retta DF parallela ad AB, che le sarà anche uguale comechè tirata tra le due parallele AE, BD; perciò sarà questa DF anche di 60, e la medesima taglierà da tutta AE di 40 la porzione FE di 15, lasciando FA di 25 comechè uguale a BD. Ben inteso tutto questo, si faccia la seguente regola del tre. Come EF di 15 sta ad FD di 60, così tutto EA di 40 al quarto proporzionale AC. Fatto il calcolo, avremo per tutto AC il quarto proporzionale 160, e perchè AB è di 60, perciò la lunghezza straniera BC sarà di 100. Inoltre perchè abbiamo la lunghezza BD di 25, ed essendo la medesima perpendicolare ad AC, così non avremo il bisogno di calcolarla. Finalmente moltiplicando BD di 25 per 50 metà di BC, il prodotto 1250 sarà la quadratura di tutto lo straniero DBC che si cercava.

3. 19.

Sia in secondo luogo qualsivoglia trapezio quadrilatero BADC che abbiano un angolo retto A e del quale si sappia il lato AB di 42 ed il lato AD di 30. Poichè i due lati AD, BC sono convergenti verso D e C, perciò prolungandosi si uniscano nel punto G della convergenza e formano il gran triangolo rettangolo BAG, del quale la porzione GCD è tutta straniera. Si cerca ora di sapere col calcolo la lunghezza del residuo straniero DG di tutto il cateto AG, dippiù la perpendicolare CF e finalmente la quadratura straniera DCG.

Primieramente per sapere la lunghezza straniera DG, si faccia così. Dall'angolo C si tiri CE parallela a DA, e misurandosi CE sia di 45, la quale tagliando da tutto BA la porzione EB di 30, lascia poi il resto EA di 12. Eseguito tutto questo, si faccia la seguente regola del tre. Come BE di 30 sta ad EC di 45, così tutto BA di 42 al quarto proporzionale AG. Fatto il calcolo, avremo per tutto AG il quarto proporzionale 63, e perchè AD è lungo 30, così lo

straniero DG sarà 33. Inoltre la retta CF, comechè perpendicolare, essendo uguale ad EA, sarà ancora 12. Finalmente moltiplicando DG di 33 per 6 metà della perpendicolare CF, il prodotto 198 sarà la quadratura di tutto lo straniero GCD che si cercava.

La esecuzione di questo indispensabile problema noi la chiameremo sempre in appresso APPARECCHIO STRANIERO ANGOLARE, giacchè il medesimo unisce ad angolo o sia al punto di convergenza due lati della figura che erano solo convergenti.

Fig. 20.

13. DATO UN TRAPEZIO QUADRILATERO CHE ABBA UN ANGOLO RETTO, TERMINARLO IN CAPOTAGLIATO RETTANGOLO E CALCOLARNE TUTTO LO STRANIERO TANTO NEI LATI QUANTO NELLA QUADRATURA. Sia il trapezio quadrilatero ABCD che abbia un angolo retto B, e del quale si sappia il lato BC di 18 ed il lato BA di 12 che formano l'angolo retto. Si cerca di terminarlo a capotagliato rettangolo e calcolarne tutto lo straniero. Per eseguirlo si faccia così. Dallo estremo C s'innalzi la perpendicolare CF tanto finchè s'incontri con AD distesa oltre sino ad F, ed avremo così il capotagliato rettangolo AFCB, del quale vi è il triangolo straniero DFC, di cui si deve sapere l'altezza DE, la base FC e tutta la sua quadratura DFC.

Per sapere la perpendicolare DE dall'angolo D si tiri la retta GDE parallela ed uguale a BC, e misurata DG di 12 la quale divide di tutto AB la parte AG di 4 dalla parte GB di 8: di più poichè GD è di 12, sarà il resto DE di 6, e questa sarà l'altezza del triangolo DFC che si cercava. Per sapere poi la lunghezza della base FC si osservi che tutto CE è di 8, comechè parallela ed uguale a BG. Ora dallo estremo A si tiri AI parallela ed uguale a BC e si unisca con CE prolungata in I, e si tiri la perpendicolare HD. Avremo dunque AH di 12, HD di 4, tutto AI di 18, e si cerca IF del triangolo rettangolo AIF, dicendo così. Come AH di 12 sta ad HD di 4, così tutto AI di 18 a tutto IF quarto proporzionale. Fatto il calcolo, ritroveremo per IF la lunghezza 6, e perchè IE è di 4, così sarà EF di 2, e perchè EG è lungo 8, sarà FC di 6, e conosceremo così la base FC che si cercava. Ora nel triangolo DFC conoscendo l'altezza 6 e la base 6, e moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 18 sarà la sua quadratura, e così avremo calcolato tutto lo straniero che si cercava.

La pratica di questo altro necessariissimo problema noi la diremo sempre in appresso APPARECCHIO STRANIERO

LATERALE perchè il medesimo non fa unire all'angolo della convergenza i lati, ma gli arresta nel lato del capotagliato rettangolo.

14. DIVIDERE QUALSIVOGLIA TRIANGOLO DA UN PUNTO PRESO IN UN LATO. Sia il triangolo qualunque BCD da dividersi in sette porzioni disuguali, ma che il punto divisorio A sia in un lato CD. Per eseguire tutto questo per il punto divisorio si faccia la solita preparazione con tirare le due linee dei quadranti AI, AE, le quali si intersecano in A ad angolo retto e dividono il presente triangolo in tre pezzi, in ciascuno dei quali si eseguisca la necessaria riduzione affinchè si abbia la particolare quadratura dei medesimi, ed unite queste insieme, poi conosceremo che la quadratura totale sia 2295. Questa quadratura si deve dividere in modo che A sia di 368, B di 290, C di 185, D di 460, E di 320, F di 368 e G di 304, mentre il primo lato di appoggio sia AH una delle linee dei quadranti.

Per dare ad A la porzione 368 si osservi che dovendoci servire di AH per lato di appoggio, noi abbiamo 175 nel primo pezzo AHD; per cui il dippiù 193 lo dobbiamo tagliare dal pezzo susseguente. Ora essendo AH il lato di appoggio dovrà essere HF il lato della incidenza; e poichè questi due lati non si uniscono in H ad angolo retto, così noi la parte 193 che dobbiamo prendere, la taglieremo a triangolo rettangolo ed indi ritroveremo un triangolo obliquangolo uguale alla quantità che si divide. Quindi dividendo 193 per $17\frac{1}{2}$ metà di AH, avremo per quoziente $11\frac{1}{3}$; per cui dall'estremo H tireremo l'alzata estrema HK lunga $11\frac{1}{3}$, e poi dal punto K tireremo la parallela AL che determina in L il punto dello incontro nel lato d'incidenza e finalmente tirata AL, la medesima sarà la divisoria per la porzione di A compresa in tutto il triangolo ALD.

Per dare a B la porzione 290 poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio AH e del medesimo lato d'incidenza HF, così noi uniremo il quantitativo ALH di 193 e la parte di B di 290, ed avremo la somma 483; diviso adunque 483 per $17\frac{1}{2}$ metà di AH, avremo per quoziente $27\frac{1}{3}$ di lunghezza; per cui dallo estremo H tireremo l'alzata HM della stessa lunghezza, e poi dal punto M tireremo la parallela MN, la quale tocca in N il lato d'incidenza, e finalmente tirata AN, la medesima sarà la divisoria per B, compresa nel triangolo ANL.

Per dare a C la porzione 185 perchè ci serviamo del

medesimo lato di appoggio e d'incidenza, così uniremo il residuo di A, la parte di B e quella di C, ed avremo in tutto 668, dividendo questo 668 per $17\frac{1}{2}$ metà di AH avremo $38\frac{2}{3}$ per quoziente; perciò facendo tanto lunga l'alzata HO tirata dallo estremo H, e poi tirata la parallela OP finchè tocchi il lato d'incidenza nel punto P dello incontro, tireremo AP la quale sarà la divisoria per la parte di C, contenuta nel triangolo APN. Eseguiti così questi tagli, ci resta di tutto il pezzo FALI la porzione AFP di 312 la quale come un residuo, entra a far parte dell'altra porzione prossima che si dovrà tagliare dal pezzo seguente.

Per dare a D la porzione 460, poichè abbiamo 312 nel residuo AFP, così il dappiù 148 lo dobbiamo prendere nel pezzo seguente, e sarà AF il lato di appoggio ed FB il lato d'incidenza. Diviso adunque 148 per 28 metà di tutto AF, avremo per quoziente $5\frac{2}{7}$. Quindi dallo estremo F si tiri l'alzata interna FS lunga $5\frac{2}{7}$ e poi dal punto S si tiri la parallela SR finchè tocchi in R il lato d'incidenza e tirata finalmente AR, la medesima sarà la divisoria per la porzione di D compresa da tutto il triangolo ARP. Per dare ad E la porzione 320 si osservi che dovendoci servire di AF per lato di appoggio, non potrà essere FB il lato d'incidenza, ma sarà il lato BC. E poichè il lato AF di appoggio non è unito ad angolo col lato CB d'incidenza sebbene sieno convergenti verso B ed F, così noi distendendo ambidue finchè si uniscano nel punto Q della convergenza, avremo formato un gran triangolo rettangolo QGC laddove prima era un trapezio quadrilatero rettangolo BEGC, del quale esce fuori il triangolo straniero QBF, del quale fa mestieri calcolare l'altezza BE, la base QF e tutta la quadratura QBF, e ci ritroveremo così nell'uso dell'apparecchio straniero angolare.

Per calcolare questo apparecchio straniero si osservi che noi abbiamo il lato FE di 10 misurato prima nella riduzione; abbiamo ancora l'altezza BE di 6 per la stessa ragione; ci resta soltanto di calcolare il resto EQ e poi tutta la straniera quadratura di questo apparecchio angolare. Per trovare questo resto EQ si faccia così. Si finga di tirare dal punto B una perpendicolare BY sopra CG, la quale sarà uguale e parallela ad EG e dividerà di tutto CG la parte CY di 24 dal resto YG di 6. Fatto questo, si dica. Come CY di 24 sta ad YB di 60, così tutto CG di 30 a tutto GQ quarto proporzionale, il quale sarà 75 e dal quale sottratta la lunghezza già nota GE di 60, ci rimane il residuo EQ di 15. Conosciuto questo, avremo

tutta la base QF di 25 e l'altezza EB di 6 e moltiplicando la base 25 per 3 metà dell'altezza, il prodotto 75 sarà la quadratura di tutto l'apparecchio straniero angolare.

Di questo calcolato apparecchio noi ci dobbiamo servire per tagliare la porzione di E di 320 servendoci di tutto AQ per lato di appoggio e di QC per lato d'incidenza. Si unisca adunque il residuo di D di 148, la parte di E di 320 e l'apparecchio straniero 75, ed avremo in tutto 543. Questa somma adunque 543 si divida per $40\frac{1}{2}$ metà di tutto il lato di appoggio AQ ed avremo per quoziente $13\frac{1}{3}$ il quale dinota la lunghezza dell'alzata che dall'estremo Q si dovrebbe inalzare. E poichè tirarla da questo punto reca un poco d'imbarazzo, così noi ci serviremo del prolungamento della perpendicolare EB che vale lo stesso, e così sempre faremo in tutti i casi che verranno in appresso. Quindi dal punto E si tiri l'alzata ET di $13\frac{1}{3}$ e dal punto T si tiri la parallela TV, la quale tocca il lato della incidenza nel punto V, e finalmente tirata AV, la medesima sarà la divisoria della porzione di E, compresa da AVBR.

Per dare ad F la parte 368, poichè dobbiamo servirci del lato di appoggio AF e non potendo essere quello della incidenza FB, ma sarà BC, perciò ci sarà mestieri servirci del medesimo artificio dell'apparecchio straniero angolare il quale perchè calcolato per l'antecedente porzione, non occorre di nuovo ripeterlo. Quindi avremo il residuo di D di 148, la parte di E di 320 e la parte di F di 368 e l'apparecchio straniero 75, ed avremo la somma 911. Diviso dunque 911 per $40\frac{1}{2}$ metà di tutto AQ, avremo per quoziente $22\frac{2}{3}$, il quale dinota l'alzata che dall'estremo Q si dovrebbe tirare e che noi tireremo da E fino ad X, e tirata poi la parallela XZ la quale tocca in Z il lato della incidenza, e finalmente tirata AZ, la medesima sarà la divisoria per la parte di F contenuta nel triangolo AVZ.

Il resto di tutta la figura compresa da AZC è la porzione di G di 304. La prova di queste operazioni eseguite nel presente triangolo ella è di sommare tutte le porzioni, le quali prese insieme debbono essere uguali alla totale quadratura del triangolo diviso.

15. DIVIDERE QUALSIVOGLIA TRIANGOLO DA UN PUNTO PRESO NELLO SPAZIO. Sia il triangolo qualunque BCD da dividersi in sette porzioni, ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Per eseguire questa divisione pe'l punto divisorio si faccia la solita preparazione col tirare le due linee de' quadranti KF, GL le quali s'intersecano in A ad

angoli retti e dividono il triangolo in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione per avere la particolare quadratura de' medesimi, ed unite poi insieme, sapremo che la totale quadratura sia 2070. Questa quadratura sia divisa in modo che A sia di 290, B di 260, C di 370, D di 290, E di 300, F di 250 e G di 310, e sia la linea de' quadranti AL il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 290 poichè il lato di appoggio è AL e quello d'incidenza è LD, perciò dividremo la porzione 290 per 10 metà di AL, ed avremo per quoziente 29. Dallo estremo L si tiri l'alzata LM lunga 29, e poi la parallela MN, e tirata AN, la medesima sarà la divisoria per A.

Per dare a B la porzione 260 si osservi che se ci vogliamo servire di AL per lato di appoggio, non potrà essere LD il lato della incidenza, ma sarà DF, sopra del quale cade la divisoria. E poichè questi due lati AL, FD non possono unirsi ad angolo perchè sono divergenti, così noi lasceremo AL e faremo lato di appoggio l'altra linea de' quadranti AF facendo il taglio alla rovescia, il quale va eseguito così. Poichè il pezzo ALDF contiene di quadratura 660, dal quale si è tagliata la parte di A di 290, così ci resta 370 contenuto da ANDF. Ora da questo residuo sottraendo ancora la parte di B di 260 ci resterebbe l'ultimo residuo 110, e questo residuo appunto è quello che noi taglieremo servendoci di AF per lato di appoggio e di FD per quello d'incidenza, allinchè resti distinta la porzione di B. Diviso adunque 110 per 15 metà di AF avremo per quoziente $7\frac{2}{3}$. Dall'estremo F si tiri l'alzata FO interna e lunga $7\frac{2}{3}$ e poi la parallela OP e finalmente tirata AP, la medesima sarà la divisoria richiesta che separa la porzione di B di 260 contenuta da APDN dal residuo triangolare AFP di 110 di tutto il pezzo e che deve entrare a far parte della porzione prossima che si taglia dal pezzo che siegue.

Per dare a C la porzione 370 si rifletta che noi abbiamo 110 nel residuo AFP; perciò il dippiù 260 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo servendoci di AF per lato di appoggio, e di FG per quello d'incidenza. Diviso adunque 260 per 15 metà di AF, avremo $17\frac{1}{3}$ per quoziente; perciò dall'estremo F tirata l'alzata esterna FQ lunga $17\frac{1}{3}$ e poi la parallela QR e finalmente AR, questa sarà la divisoria per C contenuta da tutto ARP. Fatto questo taglio, ci rimane di tutto questo pezzo il residuo triangolare AGR di 190

che entra a far parte dell'altra porzione la quale si prenderà nel pezzo seguente.

Per dare a D la porzione 290 poichè abbiamo nel pezzo antecedente un residuo 190, perciò dovremo prendere il dippiù 100 dall'altro pezzo, servendoci di AG per lato di appoggio. E poichè servendoci di questo lato di appoggio quello della incidenza non potrà essere GB ma sarà BK, i quali poichè sono convergenti verso i punti B e G, li potremo unire nel punto della convergenza e servirei del calcolo dell'apparecchio straniero angolare. Ma poichè questo metodo porta un poco di fastidio, così noi lo lasceremo nel caso presente e ci serviremo del taglio alla rovescia che riesce più spedito. Essendo tutto il pezzo AGBK di 410 e dovendone lasciare sopra del lato AG una porzione di 100, così noi la taglieremo alla rovescia servendoci di AK per lato di appoggio e di KB per lato d'incidenza. Si sottragga 100 da 410, ed avremo il residuo 310. Diviso adunque 310 per 10 metà di AK, avremo per quoziente 31. Si tiri adunque dall'estremo K l'alzata esterna KS lunga 31 e poi la parallela SV e finalmente la retta AV la quale sarà la divisoria di D, la cui parte è contenuta da tutto AVBR, rimanendo il pezzo AVK di 310 e l'altra sua parte divisa AVBG di 100 che si doveva tagliare.

Per dare ad E la porzione 300 ci serviremo dello stesso metodo usato per l'antecedente porzione. Quindi sottraendo da tutto AVK di 310 la parte di E di 300, ci rimane il residuo 10. Questo residuo adunque taglieremo alla rovescia servendoci di AK per lato di appoggio e di KB per lato d'incidenza. Diviso adunque 10 per 10 metà di AK, avremo 1 per quoziente: per cui dal punto K tireremo l'alzata KH lunga 1 e poi la parallela HE e finalmente la divisoria AE la quale separa la parte di E contenuta dal triangolo AEV, dal residuo triangolare AEK di 10 il quale entra a far parte dell'altra porzione.

Per dare ad F la porzione 250 poichè noi abbiamo 10 nel residuo triangolare AEK, così il dippiù 240 lo dobbiamo prendere nell'ultimo pezzo, servendoci di AK per lato di appoggio e di KC per lato d'incidenza. Diviso adunque 240 per 10 metà di AK, avremo per quoziente 24. Si tiri dall'estremo K l'alzata interna KI lunga 24, e poi la parallela IZ e finalmente AZ, la medesima sarà la divisoria di F compresa da AEZ. Finalmente la porzione ultima di G di 310 è contenuta da AZCL, come è manifesto.

16. DIVIDERE QUALSIVOGLIA TRAPEZIO AD ANGOLI SPO-
GENTI DA UN PUNTO PRESO IN UN LATO. Sia il trapezio ad
angoli sporgenti BCDEFG da dividersi in otto porzioni ma
che il punto divisorio A sia in un lato BG. Per eseguire

Fig. 23. questa divisione si faccia nel trapezio la solita preparazio-
ne con tirare le due linee de' quadranti III, AD le quali
intersecandosi in A ad angoli retti dividono il trapezio in
tre pezzi, in ciascheduno dei quali si faccia la necessaria
riduzione acciò possiamo conoscere la quadratura partico-
lare di ciascheduno di essi tre pezzi, e questa quadratura
particolare si noti di rinpetto a ciascheduno de' pezzi per
comodo della divisione. Così avremo nel pezzo AVG la
quadratura 45, pel pezzo VAD sarà 996 e pel pezzo DAB
sarà 577. Queste quadrature particolari si sommino ed
avremo per quadratura totale 1618 che debba dividersi in
otto porzioni, delle quali sia A di 36, B di 168, C di 210
D di 96, E di 384, F di 290, G di 290 ed H di 144 e che
la linea AV de' quadranti sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la sua porzione 36 poichè il pezzo AGV
ne contiene 45, così il residuo 9 lo taglieremo dal medesi-
mo servendoci di AV per lato di appoggio e di VG per
lato d'incidenza. Quindi diviso 9 per 9 metà di AV, il
quoziente 1 darà la lunghezza dell'alzata esterna VL e tirata
la parallela LM, la linea poi AM sarà la divisoria per A
la cui porzione è contenuta da AMG, rimanendo un re-
siduo AVN di 9 il quale entra a far parte della seguente
porzione.

Per dare a B la sua porzione 168 si osservi che aven-
done 9 nel residuo AVM del primo pezzo, il di più 159 lo
dobbiamo prendere dall'altro pezzo. In oltre perchè ci dob-
biamo servire di AV per lato di appoggio e non potendo es-
sere VF quello d'incidenza ma deve essere FE, così questi due
lati non essendo uniti ad angolo sebbene convergenti, noi gli
uniremo distendendo ambedue finchè si uniscono in K punto
della convergenza e istituiremo in questo caso il calcolo del-
l'apparecchio straniero angolare. Per calcolare lo straniero
VFR si avverta che noi conosciamo VI di 12 che è una por-
zione della base del triangolo straniero e sappiamo ancora
IF di 6 che è la perpendicolare o sia l'altezza; ci resta solo di
sapere il residuo IK della base e la sua quadratura. Per sa-
pere il residuo IK si faccia così. Fingiamo che dalla linea
EZ di 34 si tiri una perpendicolare sino ad F che sarà 8 per-
chè uguale e parallela a ZI e questa perpendicolare taglierà
dalla linea EZ la parte 28 verso E e dalla parte 6 verso Z come
che eguale e parallela ad FI. Fatto questo, si dica. Come la

parte 28 sta alla perpendicolare 8, così tutta la linea EZ di 34 a tutta ZK quarto proporzionale. Fatto il calcolo, ritroveremo ZK di $9\frac{5}{7}$, e perchè ZI è di 8, così IK sarà $1\frac{5}{7}$ ed in conseguenza tutta la base KV di $13\frac{5}{7}$; per cui moltiplicando questa base per 3 metà dell'altezza IF, il prodotto $41\frac{5}{7}$ sarà la quadratura dello apparecchio straniero angolare VFK.

Eseguito tutto questo, perchè dobbiamo tagliare 159 per la parte di B, sarà AK il lato di appoggio e KE quello d'incidenza. Uniremo adunque la porzione di B di 159 e l'apparecchio straniero $41\frac{5}{7}$ ed avremo la somma $200\frac{5}{7}$ la quale divisa per $15\frac{6}{7}$ metà di tutto AK avremo per quoziente $12\frac{3}{7}$ il quale indica la lunghezza IN dell'alzata esterna e tirata la parallela NO, la linea poi AO sarà la divisoria per la porzione di B la quale viene contenuta da tutto il pezzo AOFM.

Per dare a C la porzione 210 perchè dobbiamo servirci dello stesso lato di appoggio AV e quello della incidenza deve essere FE, così senza ripetere le istesse cose dette antecedentemente ci dobbiamo servire del medesimo apparecchio straniero angolare. Quindi uniremo l'apparecchio $41\frac{5}{7}$ la porzione residua di B di 159 e quella di C di 210 ed avremo la somma di $410\frac{5}{7}$ la quale divisa per $15\frac{6}{7}$ metà di tutto AK, il quoziente $25\frac{9}{7}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna IP, e tirata poi la parallela PQ, la linea AQ sarà la divisoria per la parte di C compresa dal triangolo AQO.

Per dare a D la porzione 96 perchè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio e dello stesso lato d'incidenza, così bisognerà servirci del medesimo apparecchio straniero. Uniremo dunque l'apparecchio $41\frac{5}{7}$ il residuo di B di 159, la parte di C di 210 e quella di D di 96 ed avremo la somma $506\frac{5}{7}$ la quale divisa per $15\frac{6}{7}$ metà di tutta AK, il quoziente $31\frac{4}{7}$ darà la lunghezza dell'alzata IR e tirata poi la parallela RS, la linea AS sarà la divisoria per la parte di D racchiusa dal pezzo ASQ.

Per dare ad E la porzione 384 si osservi che se vogliamo servirci di AV per lato di appoggio, quello d'incidenza non potrà essere VF e neppure FE, ma sarà ED; per cui sarà impossibile servirci di AV per lato di appoggio. Ci serviremo dunque di AD per lato di appoggio e di DE per quello d'incidenza e faremo uso nel caso presente del taglio alla rovescia. Poichè tutto il pezzo DAV contiene di quadratura 996, così sottraendo dal medesimo il residuo di B la parte di C e quella di D, ci resta 531. Ora poichè E deve avere 384, perciò sottraendo il minore dal maggiore avremo 147 per residuo, e questo è quello che taglieremo servendoci di AD per lato di appoggio e di DE per lato d'incidenza. Quindi 147 diviso per

23 metà di A D il quoziente $6\frac{2}{3}$ darà la lunghezza dell'alzata DT, e tirata la parallela TX, la linea AX sarà la divisoria per la porzione di E compresa da AXES e separa dalla medesima il residuo triangolare ADX di 147 che entra a far parte della porzione che si prende dall'altro pezzo.

Per dare ad F la porzione 290 poichè abbiamo 147 nel triangolo residuo ADX, il dippiù 143 lo prenderemo nel pezzo seguente, e sarà AD il lato di appoggio e DC il lato della incidenza. Dividendo adunque 143 per 23 metà di AD, il quoziente $6\frac{2}{3}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna, BY e tirata la parallela YZ, la linea AZ sarà la divisoria per la porzione di F contenuta dal pezzo AZDX.

Per dare a G la porzione 290 si osservi che servendosi di AD per lato di appoggio, quello della incidenza non può essere DC ma deve essere CB, e perchè il lato di appoggio e d'incidenza non sono convergenti verso i punti D e C, perciò sarà impossibile di far questo taglio per la via diretta, e perciò faremo il taglio alla rovescia servendoci di AH per lato di appoggio e di BC per quello d'incidenza. Quindi poichè tutto il pezzo BAD è di 577 dal quale s'è tolto AZD di 143, così ci rimane il residuo 434. Ora sottraendo da questo la parte di G di 290, l'ultimo residuo 144 sarà quello che taglieremo servendoci del lato di appoggio AH e di quello d'incidenza BC. E perchè questi due lati non sono uniti ad angolo sebbene convergenti, così forza è che noi distendiamo CB finchè si unisca in R col lato di appoggio e ne nasce così un triangolo straniero BRA che bisogna calcolare, ed in questo modo formeremo l'apparecchio straniero laterale.

Questo triangolo straniero BRA che forma l'apparecchio straniero laterale, deve essere calcolato; perciò dobbiamo sapere l'altezza BH, la base RA e tutta la sua quadratura.

Per riguardo all'altezza BH, è già noto di essere 8 per la riduzione. Per sapere la base R si faccia così. Si finga dal punto C tirata una linea che sia parallela alla linea della riduzione 36 che non oltrepassi la distanza di H: indi dal punto della direzione B si cali una perpendicolare sino a B che sarà 3 comechè uguale e parallela alla perpendicolare che si è calata da C: e finalmente dal suo estremo si cali l'altra perpendicolare che si unisca ad H e che sarà anche 3. Fatto questo, si vede chiaro che la prima perpendicolare tirata dalla linea esterna sino a B separa la parte 28 dall'altra parte 8. Eseguito questo, si dica. Come la parte 28 della linea esterna sta a 3 altra linea tirata sino a B, così tutta la linea 36 a tutta quella che si estende sino ad R che è il quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $3\frac{4}{5}$ ch'è il quarto propor-

zionale : e perchè la porzione del lato sino ad H è di 3, così resta HR solamente di $\frac{6}{7}$. Ora essendo tutto AH di 14, resterà AR di $13\frac{1}{7}$ che è appunto la lunghezza della base che si cercava. Moltiplicando adunque la base $13\frac{1}{7}$ per $\frac{4}{7}$ metà dell'altezza, il prodotto $52\frac{4}{7}$ sarà la quadratura dell'apparecchio straniero laterale.

Poichè dobbiamo tagliare alla rovescia la quadratura residua 144 e dovendo essere ora AR di $13\frac{1}{7}$ il lato di appoggio ed RC quello d'incidenza, ed essendoci stato bisogno dell'apparecchio straniero laterale che si è calcolato di $52\frac{4}{7}$, così uniremo queste due quantità ed avremo la somma $196\frac{4}{7}$. Divisa adunque questa somma per $6\frac{4}{7}$ metà di AR, il quoziente $29\frac{47}{16}$ darà la lunghezza della alzata interna RN, dal cui estremo N tirata la parallela NV, la linea AV sarà la divisoria per la porzione di G compresa da AVCZ. Finalmente il resto AVB di 144 sarà la porzione ultima spettante ad H.

17. DIVIDERE QUALSIVOGLIA TRAPEZIO AD ANGOLI SPORGENTI DA UN PUNTO PRESO NELLO SPAZIO. Sia il trapezio ad angoli sporgenti BCDEFG da dividersi in sette porzioni ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Si faccia in primo luogo la solita preparazione col tirare le due linee de' quadranti BH, IL le quali s'intersecano in A ad angoli retti e dividono il trapezio in quattro pezzi, in ognuno de' quali si faccia la necessaria riduzione acciò si abbia la quadratura di ognuno di essi, la quale si noti poi dirimpetto ad ogni pezzo fuori del trapezio. Fatto questo, avremo per pezzo BAL la quantità di 128, per LAH sarà 432, per HAI sarà 646 e per IAB sarà 384. Si sommino questi quattro pezzi, ed avremo per totale quadratura 1590 che debba dividersi in sette porzioni, della quali A sia di 200, B di 265, C di 248, D di 280, E di 256, F di 121 e G di 220 e che la linea de' quadranti AB sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 200 si osservi che nel primo pezzo BAL ne abbiamo 128; per cui il dippiù 72 lo dobbiamo prendere nel pezzo seguente, e sarà AL il lato di appoggio. Ora essendo questo il lato di appoggio e la divisoria non cadendo sopra LG, ma sopra GF, perciò questo sarà il lato d'incidenza. E perchè questo lato d'incidenza e quello di appoggio non sono uniti ad angolo, ma sono convergenti, perciò noi stenderemo ambidue e gli uniremo nel punto K della convergenza, e ne nascerà il triangolo straniero GLK che bisogna calcolare e ci serviremo in questo taglio dell'apparecchio straniero angolare. Quindi ritroveremo prima la base LK, dicendo

così. Come PS di 24 sta ad SG di 8, così tutto FV di 28 a tutto VK quarto proporzionale che si trova 9 $\frac{1}{3}$ dal quale sottratto VL di 4, resta LK di 5 $\frac{1}{3}$ che è la base del triangolo straniero. L'altezza di questo triangolo sarà 4 comechè uguale ad SV, e quindi moltiplicando la base 5 $\frac{1}{3}$ per 2 metà dell'altezza, il prodotto 10 $\frac{1}{3}$ sarà la quadratura dell'apparecchio straniero angolare. Fatto questo, alla quantità 72 che dobbiamo tagliare, si unisca l'apparecchio straniero 10 $\frac{1}{3}$, ed avremo la somma 82 $\frac{1}{3}$. Questa somma si divida per 10 $\frac{1}{3}$ metà di tutto AK, ed il quoziente 7 $\frac{72}{90}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna sino ad M, e tirata poi la parallela MN, la linea AN sarà la divisoria per A, la cui porzione è compresa di BAN.

Per dare a B la porzione 265 si osservi che volendoci servire di AL per lato di appoggio, quello d'incidenza non potrà essere LG e neppure GF, ma sarà FH; per cui sarà impossibile di servirci di AL, ma ci serviremo di AH per lato di appoggio e di HF per quello d'incidenza ed useremo il metodo del taglio alla rovescia facendo così. Poichè dal pezzo LAH di 432 abbiamo tagliato il residuo 72, così ci è rimasto 360, e perchè B è di 265, perciò sottraendo questo da 360, ci resta il residuo 95 che taglieremo. Diviso dunque 95 per 12 metà di AH, il quoziente 7 $\frac{11}{12}$ darà la lunghezza dell'alzata interna HO, e tirata poi la parallela OP, la linea AP sarà la divisoria che separa la parte di B compresa da PAN dal residuo triangolare AHP di 95 che deve entrare a far parte dell'altra porzione che si taglia dal pezzo seguente.

Per dare a C la porzione 248 si osservi che abbiamo il residuo 95 nel triangolo AHP; per cui il dappià 153 lo taglieremo dal pezzo seguente servendoci di AH per lato di appoggio e di HE per lato d'incidenza. Diviso dunque 153 per 12 metà di AH, il quoziente 12 $\frac{3}{4}$ darà la lunghezza dell'alzata esterna HQ, e tirata la parallela QR, la linea AR sarà la divisoria per C contenuta da tutto RAP.

Per dare a D la porzione 280 se ci serviremo di AH per lato di appoggio, quello d'incidenza non può essere HE ma sarà AD. Ora potendosi fare in questo caso l'apparecchio straniero angolare, noi però lo lasceremo perchè si dovrebbe calcolare una gran quantità, ed in vece useremo il taglio alla rovescia servendoci di AI per lato di appoggio. Quindi perchè il pezzo IAH contiene 646 e dal quale si è tolta la porzione 153 residua di C, ci rimane solamente 493. E poichè la porzione di D è di 280, così sottraendo il minore dal maggiore, il residuo 213 taglieremo

mo servendoci di AI per lato di appoggio. Ora perchè la divisoria per 213 non cade in ID ma in DE come lato d'incidenza, e non essendo questi due lati uniti ad angolo acbhen convergenti, così noi distenderemo ambedue finchè si uniscano nel punto V della convergenza e faremo uso dello apparecchio straniero angolare DIV, del quale bisogna calcolare la base, l'altezza e tutta la sua quadratura.

Per ritrovar la base IV si dica così. Come EB di 16 sta a BD di 6, così tutto EG di 18 a tutto GV quarto proporzionale che si trova $6\frac{3}{4}$, e perchè GF è di 4, così resta IV di $2\frac{3}{4}$ che è la base richiesta. L'altezza di questo triangolo straniero essendo uguale a GB sarà anche 2; percui moltiplicando la base $2\frac{3}{4}$ per la metà dell'altezza, il prodotto $2\frac{3}{4}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio straniero angolare. Eseguito questo, uniremo l'apparecchio $2\frac{3}{4}$ con la quantità 213 da tagliarsi, ed avremo la somma $215\frac{3}{4}$ la quale divisa per $17\frac{3}{4}$ metà di tutto AV, il quoziente $12\frac{58}{139}$ darà l'alzata esterna sino ad S, e tirata la parallela ST, la linea AT sarà la divisoria per la parte di D compresa in TAR, restando il residuo TAF di 213, il quale entra a far parte della seguente porzione.

Per dare ad E la porzione 256 si osservi che abbiamo 213 nel pezzo residuo IAT; percui il resto 43 lo taglieremo dal pezzo seguente, e sarà AI il lato di appoggio ed IC quello d'incidenza. Diviso dunque 43 per 16, metà di AI, il quoziente $2\frac{11}{16}$ darà l'alzata IX, e tirata la parallela XY, la linea AY sarà la divisoria per E compresa da tutto TAY.

Per dare ad F la parte 121 poichè dobbiamo servirci del medesimo lato di appoggio AF e del medesimo lato d'incidenza IC, così uniremo il residuo IAY di 43 e la parte di F di 121, ed avremo la somma 164, la quale divisa per 16 metà di AI, il quoziente $10\frac{1}{4}$ darà l'alzata esterna IZ, e tirata la parallela ZN, la linea AN sarà la divisoria per F contenuta da NAY. Finalmente il residuo ultimo NAB di 220 sarà la porzione spettante a G.

Questi esempi stiniamo essere sufficientissimi per sapere dividere qualsivoglia triangolo e qualsivoglia trapezio ad angoli sporgenti. Veniamo ora a stabilire le regole per la divisione dei trapezii ad angoli rientranti, i quali richieggono un maggiore preparativo.

18. DATO UN TRAPEZIO RETTANGOLO CHE ABBA UN ANGOLO RIENTRANTE, RIDURLO A CAPOTAGLIATO CON CALCOLARE TUTTA LA PARTE CHE SI TOGLIE. Sia il trapezio rettangolo

ig. 25. ABIGD che abbia un angolo rientrante D. Si cerca di ridur-

durre il medesimo a capotagliato, servendoci del lato IG. Per eseguirlo non si deve fare altro che il lato AD si distenda per DH, ed avremo in questa maniera formato il capotagliato AHIB e separato dal medesimo il triangolo GDH, del quale fa d'uopo calcolare la base GH, la perpendicolare che si abbassa da D sopra la base e tutta la sua quadratura.

Per ritrovare la lunghezza della base GH si faccia così. Dall'estremo A del lato opposto AB si tiri la perpendicolare AF uguale e parallela a BI e si unisca FG in diretto con IG, e si distenda ED sino a C. Fatto questo, avremo le seguenti lunghezze. Sarà AC di 5 comechè uguale e parallela a BE, sarà CF di 8 per la stessa ragione, sarà CD di 7 giacchè sottratto DE da tutto AB, il residuo sarà CD e finalmente FG sarà 3 per la stessa ragione. Conosciuto tutto questo per ritrovare la base GH si dica. Come AC di 5 sta a CD di 7, così tutto AF di 13 a tutto FH che si trova $18 \frac{1}{3}$. E poichè FG è di 3, così la base GH sarà $15 \frac{1}{3}$. Per ritrovare la perpendicolare che si tirerebbe dal punto D sopra GH, ci serviremo di CF di 8 ovvero EI che è lo stesso. Quindi moltiplicando la base $15 \frac{1}{3}$ per 4 metà dell'altezza, il prodotto $60 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura del triangolo GDH che si è tolto e che si voleva sapere.

Fig. 26.

Sia inoltre il trapezio rettangolo ABIFD che abbia un angolo rientrante D. Si cerca ridurre il medesimo a capotagliato, servendoci del lato IF. Per eseguir tutto questo il lato AD si distenda a dirittura per DH, e così avremo il capotagliato AHIB, ed escluso il triangolo FDH, di cui si deve calcolare la lunghezza della base FH la perpendicolare che si abbasserebbe dal punto D sopra la base e tutta la sua quadratura.

Per ritrovare la lunghezza della base FH dall'estremo A del lato opposto AB si abbassi la perpendicolare AG, la quale sarà uguale e parallela a BI e che taglierà la parte GF di 5 da tutto FI di 25, essendo AB di 20. Resta solo di calcolare GH per aver tutta la base FH. Per calcolarla il lato ED di 12 si distenda sino in C e sarà DC di 8 AG di 6 perchè uguale ad EB e CG di 5 per la stessa ragione. Quindi si dica. Come AC di 6 sta a CD di 8, così tutto AG di 11 a tutto GH che si trova $14 \frac{2}{3}$. Ora unendo GH di $14 \frac{2}{3}$ con GF di 5 avremo $19 \frac{2}{3}$ per tutta la base FH. Per la perpendicolare che si dovrebbe abbassar dal punto D, ci serviremo della sua uguale EI di 5 ovvero CG: perciò moltiplicando la base $19 \frac{2}{3}$ per 2 $\frac{1}{2}$ metà dell'altezza

22. il prodotto $49 \frac{1}{6}$ sarà la quadratura di tutto il triangolo FDH che era il residuo del capotagliato.

La pratica di questo necessario problema noi la chiameremo sempre in appresso APPARECCHIO INTERNO TRIANGOLARE perchè si calcola un triangolo tagliato da un trapezio che gli appartiene.

Fig. 25. 19. DATO UN TRAPEZIO RETTANGOLO CHE ABBA UN ANGOLO RIENTRANTE, RIDURLO A PARALLELOGRAMMO RETTANGOLO CON CALCOLARE LO STRANIERO CHE SI AGGIUNGA. Sia il trapezio rettangolo ABIGD che abbia un angolo rientrante D. Si cerca ridurlo a parallelogrammo rettangolo con calcolare tutto l'aggiunto straniero. Per cseguire questo problema dallo estremo A del lato più lungo AB si tiri la perpendicolare AF uguale e parallela a BI ed ipdi si unisca FG in diretto con GI, ed in questo modo da trapezio rettangolo sarà divenuto parallelogrammo rettangolo ABIF, del quale AFGD sarà lo straniero che bisogna calcolare. Per calcolarlo si tiri ED sino in C, e sarà DC di 7, AC di 5, CF di 8 ed FG, di 3. Quindi moltiplicando DC di 7 per $2 \frac{1}{2}$ metà di AC, il prodotto $17 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo ACD. Inoltre la somma 10 de' due lati CD, FG del copotagliato FD moltiplicata per 4 metà dell'altezza FC, il prodotto 40 sarà la quadratura del capotagliato FD. Ora unendo queste due straniere quadrature avremo la somma $57 \frac{1}{2}$ che dinota la quadratura di tutto l'aggiunto ricercato.

La esecuzione di questo problema noi la diremo sempre in appresso APPARECCHIO STRANIERO QUADRANGOLARE, giacchè col medesimo si riduce a figura quadrilatera regolare un trapezio rettangolo.

Fig. 27. 20. DATO UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI, CALCOLARE L'APPARECCHIO STRANIERO ANGOLARE CHE CONTENGA MOLTI LATI DEL TRAPEZIO. Sia il trapezio ad angoli rientranti ABDEF nel quale si faccia la interna riduzione per averne la sua quadratura. Fingiamo che dal punto A debba tirarsi una divisoria, servendoci del lato di appoggio AB. Se la divisoria cadesse nel lato BI, in questo caso si comprende facile la operazione; se cadesse in IH, si userebbe l'apparecchio interno triangolare, come è chiaro a capirsi; ma noi supponiamo che la divisoria non cada nè in BI, nè in IH, nè in HG, nè in GD, ma che cada nel lato DE della incidenza. Poichè dunque il lato di appoggio AB e quello d'incidenza ED differiscono di tanti lati, e sono tra loro convergenti, così noi stendendo ambidue gli uniremo in C

e ne nasce il pezzo straniero che bisogna calcolare. Per calcolarlo si faccia così.

Dal punto E si tiri la perpendicolare EL: indi le linee della riduzione si distendano per GO, HP, IQ. Fatto questo, noi abbiamo il grande triangolo rettangolo ELC, del quale il cateto EL viene diviso nelle parti EK di 10, KL di 8, LM di 4, MN di 6, NL di 5, e dagli estremi di ciascheduna di queste parti si sono tirate le altre rette parallele all'altro cateto LC. Ora di queste rette porzioni sono dentro del trapezio, e porzioni al di fuori e che si debbono calcolare. Le porzioni che sono dentro del trapezio sono tutte note comechè porzioni delle linee della riduzione; perciò avremo KD di 8, LG di 2, MH di 6, NI di 4, ed LB di 8. Ci resta solo di calcolare tutte le rette che sono al di fuori. Per calcolare la prima GO si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EL di 18 ad LO che si trova $14\frac{1}{2}$, dal quale tolto GL di 2, resta GO di $12\frac{1}{2}$. Ora nel triangolo DGO sapendo la base GO e la sua altezza uguale ad LH di 8, avremo la sua quadratura $49\frac{1}{2}$ moltiplicando la base per la metà dell'altezza. Per calcolare la seconda HP si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EM di 22 ad MP che si trova $17\frac{3}{4}$ dal quale tolto MH di 6, resta HP di $11\frac{3}{4}$. Ora del capotagliato HO sapendo i due lati paralleli, e che uniti insieme sono 24, e la sua altezza uguale ad LM di 4, avremo la sua quadratura 48 moltiplicando la somma dei lati paralleli con la metà dell'altezza. Per calcolare la terza IQ si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EN di 28 ad NQ che si trova $22\frac{1}{2}$ dal quale tolto NI di 4, resta IQ di $18\frac{1}{2}$. Ora del capotagliato IP sapendo la somma 30 dei due lati paralleli e la sua altezza uguale ad MN di 6, avremo la sua quadratura 90, moltiplicando la somma dei due lati paralleli per la metà dell'altezza. Finalmente per calcolare la quarta BC si dica. Come EK di 10 sta a KD di 8, così EL di 33 ad LC che si trova $26\frac{1}{2}$, dal quale tolto LB di 8, resta BC di $18\frac{1}{2}$. Quindi del capotagliato BQ sapendo la somma $36\frac{1}{2}$, dei due lati paralleli e la sua altezza uguale ad NL di 5, avremo la sua quadratura 92 moltiplicando la somma dei due lati paralleli con la metà dell'altezza, ed in questo modo avremo calcolata ogni parte di tutto lo straniero nel caso presente.

Eseguite queste operazioni, uniremo in una somma tutte le particolari quadrature delle parti dello straniero ed avremo $279\frac{3}{4}$ per quadratura totale calcolata dell'intero pezzo straniero. Intanto egli è da riflettersi che siccome

questo straniero abbraccia molti lati del dato trapezio, così questa operazione col nome di APPARECCHIO STRANIERO MOLTIATERO noi la chiameremo sempre in appresso.

21. DATO UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI CALCOLARE L'APPARECCHIO INTERIORE TRIANGOLARE CHE CONTENGA MOLTI LATI DEL TRAPEZIO. Sia il trapezio ad angoli rientranti ABCI nel quale si faccia la interna riduzione per averne la totale quadratura. Supponiamo che dal punto A debba tirarsi una divisoria con servirci di AI per lato di appoggio. Supponiamo dippiù che la divisoria non cada in IH, non in HG, non in GF, non in FE, ma in un punto di ED; per cui sarà questo il lato d'incidenza. Inoltre il lato di appoggio AI e quello d'incidenza DE essendo convergenti al di dentro del trapezio, così noi stenderemo il lato d'incidenza DE finchè si unisca in L col lato di appoggio e ne nasce così il pezzo tagliato interiore ELI che bisogna calcolare, e stabilirci ancora la lunghezza residua LA del lato di appoggio

fig. 28.

Per calcolare tutto questo dal punto D si tiri la perpendicolare RD, ed indi le linee della riduzione che bisognano, si distendano per EK, GN, IR mentre le altre restano tagliate dalla perpendicolare per LF, PH. Fatto questo, noi abbiamo il grande triangolo rettangolo DRL, del quale il cateto DR viene diviso nelle parti DK di 6, KL di 4, LN di 5, NP di 4, PR di 3 e dagli estremi di ciascuna di queste parti si sono tirate le altre rette parallele all'altro cateto RL. Ora di tutte queste altre rette porzioni sono al di fuori e porzioni sono avanti tagliate dalla perpendicolare, e che tutte bisogna conoscerle, sapendo le lunghezze delle linee della riduzione. Quindi sarà EK di 2, LF di 1, GN di 2, PH di 2, IR di 2. Ci resta solo di calcolare le altre porzioni di queste rette che terminano nella ipotenusi DL, come è chiaro.

Per calcolare la prima LM si dica. Come DK di 6 sta a KE di 2, così DL di 10 ad LM che si trova $3\frac{1}{3}$, al quale aggiunto LF di 1, avremo tutto MF di $4\frac{1}{3}$. Quindi del triangolo MEF sapendo la base e l'altezza LK di 4 avremo la sua quadratura $8\frac{2}{3}$ con moltiplicare le base per la metà dell'altezza. Per calcolare la seconda GO si dica. Come DK di 6 sta a KE di 2, così DN di 15 ad NO che si trova 5, dal quale tolto GN di 2, resta GO di 3. Ora nel capotagliato OF sapendo la somma $7\frac{1}{3}$ dei due lati paralleli e l'altezza NL di 5, avremo la sua quadratura $17\frac{1}{2}$ moltiplicando la somma dei due lati paralleli per la metà dell'altezza. Per calcolare la terza PQ si dica. Come DK

di 6 sta a KE di 2, così DP di 19 a PQ che si trova $6\frac{1}{3}$ al quale aggiunto PH di 2, avremo QH di $8\frac{1}{3}$. Quindi del capotagliato OH conoscendo la somma $11\frac{1}{3}$ dei due lati paralleli avremo la sua quadratura $22\frac{2}{3}$ col moltiplicare la stessa somma per la metà dell'altezza. Per calcolare la quarta IL si dica. Come DK di 6 sta KE di 2, così tutto DR di 22 a tutto RL che si trova $7\frac{1}{3}$ dal quale tolto IR di 2, resta IL di $5\frac{1}{3}$. Ora del capotagliato QI conoscendo la somma $13\frac{2}{3}$ dei due lati paralleli e l'altezza RP di 3 moltiplicheremo la prima per la metà della seconda, ed il prodotto $20\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura.

Eseguito tutto questo, uniremo in una somma tutte le particolari quadrature delle parti del pezzo interiore risecato ed avremo $69\frac{1}{3}$ per totale quadratura di tutto il pezzo interiore risecato dal trapezio. Dippiù conosceremo che il resto LA del lato di appoggio sia $16\frac{2}{3}$, essendo LI di $5\frac{1}{3}$. Finalmente la pratica esecuzione di questo problema noi la chiameremo sempre in appresso APPARECCHIO INTERNO MOLTILATERO giacchè il medesimo sta a fronte di molti lati del dato trapezio.

22. DATO UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI. CALCOLARE L'APPARECCHIO QUADRANGOLARE CHE CONTENGA MOLTI LATI DEL TRAPEZIO. Sia il trapezio ad angoli rientranti ABCD nel quale si faccia la interna riduzione per averne la totale quadratura. Sopponiamo che dal punto B debba tirarsi una divisoria, servendoci indispensabilmente di BA per lato di appoggio e che questa divisoria non cada in AF, non in FE, neppure in ED ma in un punto del lato opposto DC che sarà il lato d'incidenza poichè questo lato d'incidenza ed il lato di appoggio sono paralleli fra loro; per cui non gli possiamo unire e perciò ci serviremo dell'apparecchio straniero quadrangolare. Quindi il lato CD essendo più corto del lato opposto BA, lo stenderemo per DG e sarà CG uguale a BA: indi tireremo GA uguale e parallela a CB, ed avremo formato un parallelogramma rettangolo ABGG laddove prima era un trapezio ed avremo un pezzo straniero AGD, di cui fa mestieri calcolare tutta la quadratura.

Per calcolare tutto questo le linee dell'interna riduzione si distendano per EH ed FI, ed avremo per rapporto dei lati e delle linee di riduzione le seguenti note lunghezze. Sarà AI di 6, IF di 4, e moltiplicando AI per la metà di IF, il prodotto 12 sarà la quadratura del primo pezzo triangolare straniero AIF. Inoltre abbiamo HI di 6 ed HE di 2; per cui del capotagliato IE conoscendo la

Fig. 29.

41

somma 6 dei due lati paralleli e l'altezza 6, e moltiplicando la prima per la metà della seconda, il prodotto 18 sarà la quadratura del capotagliato straniero. Finalmente abbiamo HG di 5 e GD di 6; percui del capotagliato HD sapendo la somma 8 dei due lati paralleli e l'altezza 5, e moltiplicando la prima per la metà della seconda, il prodotto 20 sarà la quadratura dell'ultimo straniero capotagliato.

Eseguito questo, uniremo tutte queste straniere quadrature dei pezzi dell'apparecchio ed avremo 50 per la totale sua quadratura. Ora questa pratica la diremo sempre in appresso APPARECCHIO QUADRANGOLARE MULTILATERO comechè contiene molti lati del trapezio. Entriamo intanto dopo questi preparativi alla divisione dei trapezii ad angoli rientranti, dei quali porteremo tre esempj acciò si veggia la pratica degli apparecchi già descritti e di tutti i casi possibili per la divisione dei medesimi.

23. DIVIDERE UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI DA UN PUNTO PRESO NELLO SPAZIO. Per la divisione dei trapezii ad angoli rientranti, noi la faremo col mettere nello spazio il punto divisorio, giacchè volendolo porre in un lato può accadere il caso della intersecazione, della quale a suo luogo daremo la pratica. Intanto di siffatta divisione addurremo tre esempj, dei quali nel primo faremo uso degli apparecchi stranieri, nel secondo ci serviremo degli apparecchi interni e nel terzo finalmente faremo qualche taglio a capotagliato.

Sia in primo luogo il trapezio ad angoli rientranti

g. 30. BDKM da dividersi in otto porzioni, ma che il punto divisorio A sia nello spazio. Si faccia la solita preparazione con tirare le due linee de' quadranti VO, SG, le quali intersecandosi in A ad angoli retti dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione acciò si conosca la quadratura particolare di ognuno di essi pezzi, e questa quadratura particolare si noti dirimpetto a ciascheduno de' quattro pezzi per maggior comodo della divisione. Avremo dunque pel pezzo VAS la quadratura 282, per VAG sarà 320, per GAO sarà 308 e per OAS sarà 291. Si sommino questi quattro pezzi, ed il prodotto 1201 sarà la quadratura totale di tutto il dato trapezio, della quale sia A di 147, B di 132, C di 184, D di 153, E di 192, F di 180, G di 103 ed H di 110, e che la linea de' quadranti AS debba essere il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la sua parte 147, essendo AS il lato di appoggio, quello della incidenza non potendo essere SP, non

lato BC, ed essendo questo convergente col lato di appoggio, così gli uniremo in Q punto della convergenza ed avremo lo apparecchio straniero moltilatero che si calcolerà secondo il metodo già descritto. Supponiamo adunque fatto questo calcolo, dal quale conosceremo il lato esterno SQ di $20 \frac{4}{5}$ e tutta la quadratura di questo apparecchio $140 \frac{4}{5}$. Uniremo le parte di A di 147 e la quadratura dello apparecchio $140 \frac{4}{5}$ ed avremo la somma $287 \frac{4}{5}$ la quale dividendosi per $17 \frac{2}{5}$ metà di tutto AQ, il quoziente $16 \frac{4}{87}$ darà l'alzata esterna RT, e tirata la parallela TX, la linea AX sarà la divisoria per la parte di A.

Per dare a B la porzione 132 poichè la sua divisoria cade nel lato CV, così noi lasceremo AS per lato di appoggio e ci serviremo di AV comechè unito a quello d'incidenza, e per questo taglio faremo uso del taglio alla rovescia. Poichè dal pezzo VAS di 282 si è tolta la parte di A di 147, così ci è rimasto 135, e perchè B deve avere 132, così sottraendo il minore dal maggiore, ci resta il residuo 3 che noi taglieremo. Diviso adunque 3 per 10 metà di AV, il quoziente $\frac{3}{10}$ darà l'alzata interna VY, e tirata la parallela YZ, la linea AZ sarà la divisoria per B compresa da XAZ, e ci rimane un residuo triangolare ZAV di 3 che serve per quella porzione che entra nell'altro pezzo.

Per dare a C la porzione 184 si osservi che ne abbiamo 3 nel residuo del primo pezzo; per cui dobbiamo tagliarne altri 181 dal secondo pezzo. E poichè servendoci di AV per lato di appoggio, quello d'incidenza sarà DE, così uniremo nel punto di convergenza C l'uno e l'altro e ci serviremo dello apparecchio straniero moltilatero CVFD che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito il calcolo di questo apparecchio, dal quale sapremo il lato esterno VC di $8 \frac{7}{8}$ e tutta la sua quadratura $64 \frac{13}{16}$. Uniremo dunque questa straniera quadratura e la parte residua di C, ed avremo la somma $245 \frac{13}{16}$, la quale divisa per $14 \frac{7}{10}$ metà di tutto AC, il quoziente $17 \frac{6}{34}$ darà l'alzata esterna BH, e tirata poi la parallela HI, la linea AI sarà la divisoria per C contenuta da ZAI.

Per dare a D la parte 153 si osservi che il pezzo VAG essendo 320 e dal medesimo essendosi tolto 181, ci è rimasto solo 139; per cui il dippiù 14 lo dobbiamo prendere dall'altro pezzo GAO, servendoci di AG per lato di appoggio. E poichè per questa quantità la divisoria non cade in GK ma in HK come lato d'incidenza, e non essendo questi due lati uniti, perciò distendendo ambedue in L avremo l'apparecchio straniero angolare GHL che bisogna calcolare. Supponiamo ese-

guito questo calcolo dello apparecchio, da cui conosceremo che il lato esterno GL sia $1 \frac{1}{4}$ e la quadratura straniera $\frac{5}{8}$. Ora uniremo questo apparecchio e la porzione 14 ed avremo in una somma $14 \frac{5}{8}$, la quale divisa per $10 \frac{1}{2}$ metà di tutto AL, il quoziente $1 \frac{4}{9}$ darà l'alzata esterna KM, e tirata la parallela MN, la linea AN sarà la divisoria per D compresa da IAN.

Per dare ad E la porzione 192 si osservi che per questa porzione servendoci di AG per lato di appoggio, quello della incidenza sarà eziandio HK; per cui ci bisogna ancora l'apparecchio straniero angolare GHL. Uniremo dunque l'apparecchio, il residuo di D e la parte di E ed avremo la somma $206 \frac{5}{8}$, la quale divisa per $10 \frac{1}{2}$ metà di AL, il quoziente $20 \frac{33}{8}$, darà l'alzata KP, la parallela PQ e la linea AQ sarà la divisoria per E contenuta da NAQ. Fatto questo, ci resta del pezzo GAO la porzione QAO di 102 che serve per l'altro taglio nel pezzo seguente.

Per dare ad F la porzione 180 si osservi che nel pezzo antecedente abbiamo di residuo 102; per cui il doppio 78 lo taglieremo dal pezzo che siegue, servendoci di AO per lato di appoggio. E poiché il lato d'incidenza non può essere OM ma sarà MN, così uniremo questi due lati nel punto di convergenza X e ci serviremo dello apparecchio straniero angolare MOX che bisogna calcolare. Supponiamo intanto già eseguito questo calcolo, dal quale sapremo che la linea esterna OX sia 17, tutta la quadratura 85. Unendo dunque l'apparecchio straniero angolare col residuo di F di 78, la somma 163 la divideremo per 16 metà di tutto AX, ed il quoziente $10 \frac{3}{16}$ darà l'alzata ST, la parallela TV e la linea AV sarà la divisoria per la parte di F, la quale è contenuta in VAQ.

Per dare a G la porzione 103, servendoci dello stesso lato di appoggio AO, quello d'incidenza sarà anche MN; per cui ci serviremo del medesimo apparecchio straniero angolare. Uniremo dunque l'apparecchio 85, il residuo di F di 78 e la parte di G di 103 ed avremo la somma 266, la quale divisa per 16 metà di AX, il quoziente $16 \frac{5}{8}$ darà l'alzata SG, la parallela GL, e la linea AL sarà la divisoria per G. Finalmente il resto LAS di 110 di tutto il pezzo sarà la porzione ultima che spetta ad H, ed in questo modo avremo diviso il dato trapezio facendo uso degli stranieri apparecchio.

Sia in secondo luogo il trapezio ad angoli rientranti BIIKNPRSV che debba dividersi in undici porzioni, sta-

bilendo il punto divisorio A nello spazio. Per eseguirlo si faccia in questo trapezio la solita preparazione con tirare le due linee de' quadranti FD, EB, le quali intersecandosi in A ad angoli retti dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascheduno de' quali si faccia la necessaria riduzione acciò si abbia la quadratura particolare di ognuno de' quattro pezzi, la quale si noti dirimpetto a ciascheduno di essi. Quindi avremo che il pezzo BAD sia di $488 \frac{1}{2}$, il pezzo DAE di 459, il pezzo EAF di 481 ed il pezzo FAB di $596 \frac{1}{2}$. Questo quattro quantità si sommino, ed avremo per la totale quadratura 2025, la quale va divisa in undici porzioni, delle quali A sia di 100, B di 120, C di 130, D di $268 \frac{1}{2}$, E di 120, F di 209, G di 280, H di 290, I di 200, K di 300 ed L di $107 \frac{1}{2}$, e che una delle linee de' quadranti AB sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 100, perchè il lato di appoggio è AB e quello d'incidenza non potendo essere BC ma sarà CI, il quale convergendo col lato di appoggio al di dentro del trapezio, così noi stenderemo IC sino ad H e ne nasce il triangolo CHB che si deve calcolare, e ci troveremo nel caso dell'apparecchio interno triangolare. Per calcolare questo triangolo dell'apparecchio interno egli fa d'uopo che si calcoli prima la base HB per indi conoscere il resto HA. Per sapere questa base fingeremo che dal punto I si tiri una perpendicolare sopra HB e sopra di questa perpendicolare un'altra linea dal punto C ed avremo un triangolo rettangolo, il cui cateto più lungo vien distinto in due porzioni, delle quali la più lunga che comincia da I, sarà 19, il resto 4; di più la linea tirata da C sarà 3, giacchè siccome il punto I è distante dalla linea de' quadranti AD per un intervallo 26 e la linea dalla riduzione sino a C essendo 23, così il suo prolungamento sarà 3. Inoltre essendo la linea dei quadranti AB lunga 28, così la perpendicolare tirata da I taglierà il lato HB in due porzioni, delle quali quella verso B sarà 2 e l'altra verso H si deve calcolare, dicendo così. Come la prima parte 19 della perpendicolare tirata da I sino dirimpetto a C sta alla linea 3 tirata sino a C, così tutta la perpendicolare 23 tirata sino ad HB alla porzione sino ad H che si trova $3 \frac{1}{19}$, e perchè il resto sino a B è di 2, così sarà tutta la base HB di $5 \frac{17}{19}$. Ritrovata la base, la sua altezza si avrà dalle linee della riduzione che sarà 4, e quindi moltiplicata la base $5 \frac{17}{19}$ per 2 metà dell'altezza, il prodotto

$11 \frac{1}{19}$ sarà la quadratura di tutto lo apparecchio interno triangolare HCB. Da questo conosciamo finalmente che essendo tutto AB di 28, dal quale si è tolto HB, il resto HA sarà di $22 \frac{7}{19}$.

Ritrovato così lo apparecchio interno triangolare $11 \frac{1}{19}$, questo lo taglieremo dalla parte di A di $\frac{100}{19}$ ed avremo il residuo $88 \frac{14}{19}$ che dovremo tagliare dal primo pezzo, e sarà AH il lato di appoggio ed HI quello d'incidenza. Diviso dunque $88 \frac{14}{19}$ per $11 \frac{7}{38}$ metà di AH, il quoziente $7 \frac{543}{8075}$ darà la lunghezza dell'alzata interna HK, la parallela KO e la linea AO sarà la divisoria per la parte di A che viene compresa da tutto ARCO.

Per dare a B la porzione 120 perchè ci dobbiamo servire del medesimo lato di appoggio AB, e quello d'incidenza non essendo BC ma CI, così sarà mestieri di servirci del medesimo apparecchio interno triangolare. Quindi escludendo lo apparecchio $11 \frac{1}{19}$ uniremo soltanto la residua porzione di A di $88 \frac{14}{19}$ con la porzione di B di 120, e la loro somma $208 \frac{14}{19}$ si divida per $11 \frac{7}{38}$ metà del lato di appoggio residuo AH, ed il quoziente $18 \frac{5358}{8075}$ darà l'alzata HL, la parallela LP e la linea AP sarà la divisoria di B compresa da OAP.

Per dare a C la parte 130 se ci vogliamo servire di AB per lato di appoggio, quello della incidenza non potrà essere BC e non CI, ma sarà IG, e perciò noi ci serviremo per lato di appoggio di AD facendo il taglio alla rovescia. Perchè dunque il pezzo BAD contiene $488 \frac{1}{2}$, e dal quale si è tolta la parte di A e quella di B, così ci resta $268 \frac{1}{2}$. Ora essendo la parte di C di 130, perciò sottraendo il minore dal maggiore, il residuo $138 \frac{1}{2}$ sarà quello che noi taglieremo alla rovescia servendoci di AD per lato di appoggio e di GI per quello d'incidenza. E poichè questi due lati non sono uniti ad angolo ma convergono al di dentro del trapezio, così noi stenderemo IG per GR, e ne nasce il triangolo GRD che si deve calcolare, e che sarà l'apparecchio interno triangolare. Per calcolare in primo luogo la sua base RD fingeremo che dal punto I si tiri la perpendicolare sopra RD e poi dal punto G una perpendicolare sopra la prima, ed in questa maniera avremo un triangolo rettangolo, il cui cateto più lungo sarà diviso in due porzioni, delle quali la più lunga che comincia da I, sarà 18, il resto 8 e tutta sarà 26; di più la linea tirata da G sarà 7 come appare dalla riduzione. Inoltre essendo la linea de' quadranti AD lunga

25, così la perpendicolare tirata da I taglierà il lato RD in due porzioni, delle quali quella verso D sarà 2 e l'altra verso R si deve calcolare, dicendo così. Come la prima parte 18 della perpendicolare tirata da I sta alla linea 7 tirata sino a G, così tutta la perpendicolare 26 alla porzione sino ad R che si trova $10 \frac{1}{9}$, e perchè il resto sino a D è di 2, così sarà tutta la base RD di $12 \frac{1}{9}$. Ritrovata la base del triangolo GRD, la sua altezza sarà 8 come appare dalle linee di riduzione, e quindi moltiplicata la base $12 \frac{1}{9}$ per 4 metà dell'altezza, il prodotto $48 \frac{4}{9}$ sarà la quadratura di tutto lo apparecchio interno triangolare. Da questo adunque conosceremo che il resto RA sarà $12 \frac{8}{9}$ perchè tutta la linea AD è di 25.

Ritrovato lo apparecchio interno triangolare $48 \frac{4}{9}$, il medesimo lo taglieremo dalla quantità $138 \frac{1}{2}$ che dobbiamo tagliare alla rovescia e ci resta $90 \frac{1}{18}$ che taglieremo servendoci di AR per lato di appoggio e di RI per lato d'incidenza. Diviso adunque $90 \frac{1}{18}$ per $6 \frac{4}{9}$ metà di AR, il quoziente $13 \frac{107}{1044}$ darà l'alzata interna RS, la parallela SP, e la linea AP sarà la divisoria per C, la cui parte è contenuta da PAP, e ci rimane di tutto il pezzo BAD il residuo PAD di $138 \frac{1}{2}$ che entra nella seguente porzione che taglieremo dall'altro pezzo.

Per dare a D la porzione 268 $\frac{1}{2}$ poichè noi abbiamo $138 \frac{1}{2}$ per residuo nel primo pezzo, così dobbiamo prendere altri 130 nel pezzo seguente. E poichè il lato di appoggio essendo AD, quello d'incidenza non potendo essere DH ma sarà HL, e comechè sono convergenti, noi li uniremo nel punto Z ed avremo il triangolo DHZ che bisogna calcolare per lo apparecchio straniero angolare. Supponiamo già calcolato tutto questo, da cui conosceremo il lato o sia la base DZ di $5 \frac{1}{2}$ e tutta la quadratura anche $5 \frac{1}{2}$. Uniremo dunque questo apparecchio straniero angolare col di più 130 della porzione di D, e la somma $135 \frac{1}{2}$ si divida per $15 \frac{1}{4}$ metà di tutto AZ, ed il quoziente $8 \frac{5}{6}$ darà l'alzata esterna KF, la parallela FG e la linea AG sarà la divisoria per D contenuta da tutto GAP.

Per dare ad E la porzione 120 essendo AD il lato di appoggio e non potendo essere HL quello d'incidenza ma sarà LK, così essendo questi convergenti al di dentro, noi stenderemo KL per LC, e ne nasce il pezzo LHDC che si deve calcolare, ed avremo a servirci in questo caso dello apparecchio interno multilatero. Per calcolarlo fingeremo che dal punto K si tiri una perpendicolare sopra

CD, la quale verrà incontrata dalla linea tirata dal punto L di 2; indi entrando nel pezzo dello apparecchio, interseca la prima linea di riduzione, lasciando la parte verso H di 8 e l'altra parte sino al lato LC si deve calcolare: finalmente interseca CD in due parti, rimanendo la porzione verso D di 5, e l'altra sino a C si deve calcolare. Avremo dunque un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa sarà KC, ed il cateto più lungo verrà diviso in tre parti, delle quali la prima che comincia dal punto K sino dirimpetto ad L, sarà di 18, l'altra da questo punto sino alla prima linea di riduzione sarà 8 e la terza da questo punto sino a CD sarà 2 e tutto il cateto sarà lungo 28.

Per sapere la prima linea di riduzione che entra nell'apparecchio, si dica così. Come la prima porzione 18 della perpendicolare tirata dal punto K sta a 2 linea tirata sino ad L, così le prime due porzioni della medesima perpendicolare tirata alla prima linea di riduzione che fanno 26 alla porzione sino alla ipotenusa che si trova $2 \frac{8}{9}$, e perchè il resto sino ad H è di 8, così sarà tutta questa linea $10 \frac{8}{9}$, e perchè questa linea calcolata è una base di triangolo, la cui altezza è 8 che si conosca dalle altre linee di riduzione, perciò moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $43 \frac{5}{9}$ sarà la quadratura di questo primo pezzo triangolare dello apparecchio interno. Inoltre per calcolare CD si dica. Come la prima porzione 18 della perpendicolare tirata dal punto K sta a 2 linea tirata sino ad L, così tutta la perpendicolare 28 alla porzione sino a C che si trova $3 \frac{1}{9}$, e perchè il resto sino a D è di 5, così sarà tutto CD di $8 \frac{1}{9}$. Avremo dunque in questo secondo pezzo dello apparecchio un capotagliato, i cui due lati opposti paralleli sommati insieme fanno 19 e perchè la sua altezza è 2 conosciuta dalla riduzione, perciò moltiplicata la somma 19 dei due lati paralleli per la metà dell'altezza, il prodotto 19 sarà la quadratura del capotagliato. Ora unendo insieme la quadratura del triangolo $43 \frac{5}{9}$ con la quadratura del capotagliato 19, la somma $62 \frac{5}{9}$ sarà la quadratura di tutto l'apparecchio interno multilatero LHDC. Conosceremo da questo che essendo CD di $8 \frac{1}{9}$, il resto CA deve essere $16 \frac{8}{9}$, essendo tutto AD di 25.

Ritrovato così l'apparecchio interno, per tagliare la porzione di E di 120 noi uniremo questa porzione 120 ed il residuo di D di 130 espresso da GAD, e dalla loro somma 250 ne taglieremo l'apparecchio $62 \frac{5}{9}$ e ci rimane il residuo $187 \frac{4}{9}$ che noi taglieremo servendoci di AC per lato di appoggio e di CK per lato d'incidenza.

Diviso adunque $187 \frac{4}{9}$ per $8 \frac{4}{9}$ metà di AC, il quoziente $23 \frac{135}{684}$ darà l'alzata interna CY, la parallela YV, e la linea AV sarà la divisoria per E, la cui parte è contenuta da VAG.

Per dare ad P la parte 109 si osservi che servendoci di AD per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà DH, non HL, LK, ma deve essere KM; per cui lasceremo questo lato di appoggio e ci serviremo in sua vece della linea de' quadranti AE e faremo il taglio alla rovescia. E poichè il pezzo EAD è di 459, dal quale si è tolta la porzione residua di D e la parte di E, così è rimasto il residuo 209, dal quale tolta via la parte di F di 109, ci resta l'ultimo residuo 100 che sarà quello che taglieremo, servendoci di AE per lato di appoggio. E perchè il lato d'incidenza non può essere EM, ma deve essere MK, così essendo questi convergenti al di dentro del trapezio, stenderemo KM per MT, e ne nasce il triangolo TME che si deve calcolare, e ci serviremo dello apparecchio interno triangolare. Per calcolarlo fingeremo che dal punto K si tiri una perpendicolare sino ad E, essendo la distanza di K dalla linea AD uguale alla EA, ed avremo il triangolo rettangolo KET, di cui cerchiamo ET. Per saperla dal punto M si tiri una retta a KE, la quale sarà 12, e questa dividerà il cateto o sia perpendicolare KE in due porzioni, delle quali la prima parte che comincia da K, sarà 14, l'altra che finisce in E, sarà 6. Ora si dica come la prima parte 14 che comincia da K, sta a 12, linea tirata sino ad M, così tutta KE di 20 a tutta ET che si trova $17 \frac{1}{7}$; conosciuta la base ed essendo l'altezza 6, moltiplicheremo questa base per la metà dell'altezza, ed il prodotto $51 \frac{3}{7}$ sarà la quadratura di tutto lo apparecchio interno triangolare EMT. Conosceremo da questo che essendosi ritrovato ET di $17 \frac{1}{7}$, sarà il resto TA di $10 \frac{6}{7}$; poichè tutto AE è di 28.

Questo apparecchio interno triangolare $51 \frac{3}{7}$ si sottragga da 100 che dobbiamo tagliare, ed avremo il residuo $48 \frac{4}{7}$ che noi taglieremo servendoci di AT per lato di appoggio e di TK per lato d'incidenza. Diviso dunque $48 \frac{4}{7}$ per $5 \frac{3}{7}$ metà di AT, il quoziente $8 \frac{136}{133}$ darà l'alzata interna TR, la parallela RB e la linea AB sarà la divisoria per F contenuta da BAV, rimanendoci BAE di 100 che entra a far parte della porzione seguente.

Per dare a G la porzione 280 noi ne abbiamo 100 nel residuo EAB: per cui il dippiù 180 lo prenderemo nel pezzo seguente. E poichè servendoci di AE per lato di

appoggio, quello d'incidenza non può essere EN, ma sarà NO, ed essendo i medesimi convergenti, li uniremo in X ed avremo il triangolo ENX che bisogna calcolare per lo apparecchio straniero angolare. Supponiamo calcolato il medesimo, dal quale conosceremo che la base EX sia 14 e la sua quadratura 35. Unendo adunque lo apparecchio straniero 35 con la porzione 180 avremo la somma 215, la quale divisa per 21 metà di tutto AX, il quoziente $10 \frac{5}{11}$ darà l'alzata YZ, la parallela ZS, e la linea AS sarà la divisoria per G contenuta da SAB.

Per dare ad H la porzione 290 se ci serviremo di AE per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà EV, non NO, non OP, ma sarà PE; perciò ci serviremo di AF per lato di appoggio e faremo il taglio alla rovescia; poichè il pezzo FAE è di 481 e dal quale si è tolto 180 per lo di più di G, così ci resta 301, dal quale togliendo 290 per la parte di H, l'ultimo residuo 11 sarà quello che taglieremo alla rovescia. Diviso quindi 11 per 11 $\frac{1}{2}$ metà di AF, il quoziente $\frac{2}{3}$ darà l'alzata FM, la parallela MS e la linea AS sarà la divisoria per H compresa da SAS, e ci rimane il residuo SAF di 11 che entra a far parte della porzione seguente.

Per dare ad I la parte 200 noi ne abbiamo 11 nel residuo antecedente; perciò dobbiamo tagliarne 189 nel pezzo che siegue. E perchè servendoci di AF per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà FQ, non QR, ma RS, e perchè questo è convergente col primo, così li uniremo nel punto L, e ne nasce l'apparecchio straniero moltilatero LFQR che bisogna calcolare. Supponiamo essersi calcolato questo, da cui conosceremo che il lato FL sia 11 $\frac{1}{3}$ e tutta la quadratura 38 $\frac{2}{3}$. Unendo questa quadratura straniera col di più di I di 189, la somma 227 $\frac{2}{3}$ si divida per 17 $\frac{1}{10}$ metà di tutto AL, ed il quoziente 13 $\frac{2}{17}$ darà l'alzata CZ, la parallela ZV, e la linea AV sarà la divisoria per la parte di I compresa in SAV.

Per dare a K la porzione 300 se ci serviremo di AF per lato di appoggio, quello d'incidenza non è FQ, non QR, non RS, non ST, ma sarà TV; quindi è che ci serviremo di AB per lato di appoggio e faremo il taglio alla rovescia. Poichè il pezzo FAB contiene 596 $\frac{1}{2}$ dal quale si è tolto il di più di I di 189, e ci è rimasto 407 $\frac{1}{2}$ e togliendo anche da questo la parte di K di 300, ci rimane l'ultimo residuo 107 $\frac{1}{2}$ che taglieremo servendoci di AB per lato di appoggio e di TV per quello d'incidenza; e perchè questi due lati sono convergenti; così

noi li uniremo nel punto X, e ne nasce il triangolo BVX che sarà l'apparecchio straniero angolare che bisogna prima calcolare. Supponiamo già eseguito questo calcolo; per cui conosceremo che sia la base BX di 24 e tutta la quadratura 72. Uniremo dunque lo apparecchio col residuo da tagliarsi, ed avremo la somma $179 \frac{1}{2}$, la quale divisa per 26 metà di tutto AX, il quoziente $6 \frac{4}{5}$ darà l'alzata ZQ, la parallela QI, e la linea AI sarà la divisoria per K contenuta da VAI. Finalmente il resto LAB della divisione sarà la porzione spettante ad L, come si vede essere di $107 \frac{1}{2}$ che era l'ultima parte.

Fig. 32.

Sia in terzo luogo il trapezio ad angoli rientranti GKMPD che debba dividersi in sette porzioni, prendendo il punto divisorio A nello spazio. Si faccia al solito la dovuta preparazione con tirare le due linee de' quadranti BC, DE, le quali intersecandosi in A ad angoli retti, dividono tutto il trapezio in quattro pezzi, in ciascuno de' quali si faccia la necessaria riduzione acciò si abbia la quadratura particolare di ogni pezzo, la quale si noti dirimpetto a ciascuno di essi. Avremo dunque il pezzo DAB di $197 \frac{1}{2}$, il pezzo BAE di 251, il pezzo EAC di 277 ed il pezzo CAD di 308. Si sommino queste quattro quantità, ed avremo 1033 $\frac{1}{2}$ per totale quadratura, la quale va divisa in sette porzioni, delle quali A sia di 60, B di $150 \frac{1}{2}$, C di 200, D di 90, E di 100, F di 300 e G di 133 e che una delle linee de' quadranti AD sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 60 si osservi che essendo AD il lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà DF, ma sarà FG, e perchè questi due lati convergono al di dentro, perciò stenderemo GF per FH, ed avremo il triangolo FDI per lo apparecchio interno triangolare che bisogna calcolare. Supponiamo fatto questo calcolo e conosceremo essere la base DH di $89 \frac{1}{7}$ e tutta la sua quadratura $21 \frac{11}{34}$, restando HA di $11 \frac{8}{17}$. Ora dalla parte di A di 60 tolto via l'apparecchio, ci rimane il residuo $33 \frac{23}{34}$, il quale diviso per $5 \frac{25}{34}$ metà di AH, il quoziente $6 \frac{40}{663}$ darà l'alzata HI, la parallela IK, e la linea AK sarà la divisoria per A e resta di tutto il primo pezzo l'avanzo KAB di $137 \frac{1}{2}$ che serve per l'altra porzione.

Per dare a B la parte $150 \frac{1}{2}$, poichè ne abbiamo $137 \frac{1}{2}$ nel resto del primo pezzo, perciò il dippiù 13 lo prenderemo dal pezzo seguente, servendoci di AB per lato di appoggio e di BH per lato d'incidenza. Diviso dunque 13 per 10 metà di AB il quoziente $1 \frac{1}{10}$ darà l'alzata BL, la

parallela LM, e la linea AM sarà la divisoria per B contenuta da KAM.

Per dare a C la porzione 200 se ci serviremo di AB per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà BH, non HI, non IK, ma sarà KE: perciò lasceremo il primo e ci serviremo di AE per lato di appoggio, facendo il taglio alla rovescia. Quindi il pezzo BAE essendo 251, dal quale si è tolto 13 della porzione di B, ci è rimasto 238, e da questo togliendo anche la porzione di C di 200, ci rimane l'ultimo residuo 38 che taglieremo alla rovescia. Diviso dunque 38 per 8 metà di AE, il quoziente $4\frac{3}{4}$ darà l'alzata EN, la parallela NO, e la linea AO sarà la divisoria per C, la cui porzione è MAO, e ci resta OAE di 38 che entra nella seguente porzione.

Per dare a D la porzione 90 poichè abbiamo il residuo 38 nel pezzo antecedente, così il di più 52 lo prenderemo nel pezzo seguente. E poichè servendoci di AE per lato di appoggio, quello d'incidenza non potendo essere EL, ma deve essere LM, così stenderemo ML per LX ed avremo il triangolo LXE per l'apparecchio interno triangolare che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito questo calcolo e sapremo che XE sia $4\frac{8}{13}$ e la sua quadratura $6\frac{11}{13}$, donde appare che il resto XA sia $11\frac{5}{13}$. Quindi da 52 tolto via lo apparecchio $6\frac{11}{13}$, il resto $45\frac{1}{13}$ lo divideremo per $5\frac{9}{13}$ metà di AX, ed il quoziente $7\frac{42}{48}$ darà l'alzata XY, la parallela YZ, e la linea AZ sarà la divisoria per D contenuta da OAZ.

Per dare ad E la parte 100 poichè dobbiamo servirci di AE per lato di appoggio e non potendo essere quello d'incidenza nè EL, nè LM, ma sarà MN ed essendo MN parallelo con AE, così noi faremo il taglio in forma di capotagliato. E perchè questi due lati paralleli non sono uniti ad un terzo lato con angoli retti, così noi gli uniremo facendo così. Dallo estremo più lungo M si tiri la perpendicolare MV finchè s'incontra col prolungamento di AE in V, ed avremo in questo modo il pezzo straniero MVE che bisogna calcolare e che costituisce lo apparecchio straniero quadrangolare. Per calcolarlo dall'angolo L si tiri LT e facendo riflessione alle linee della riduzione sapremo che essendo il punto M distante dalla linea di quadranti AG per lo intervallo 20, così perchè AE è di 16, sarà EV di 4, e per l'istessa ragione sarà LT di 7. Conosceremo di più che VT sarà 3 e TM di 13: perciò si deduce che il capotagliato ET avrà di quadratura $16\frac{1}{2}$, moltiplicando i due lati paralleli per la metà dell'altezza e che il triangolo LTM

ne avrà $45 \frac{7}{8}$, e tutto lo apparecchio straniero quadrangolare MVE sarà 62 come è manifesto.

Fatto questo, acciò si proceda alla divisione della parte di E di 100, noi uniremo il di più di D di 52 contenuto da EAZ lo apparecchio straniero 62 e la parte di E di 100 ed avremo la somma 214. Questa somma si divida per 8 metà dal lato divisore VM, e dal quoziente $26 \frac{3}{4}$ si sottragga il lato di appoggio intero AV di 20, ed il residuo $6 \frac{3}{4}$ darà la lunghezza contata sopra dell' altro lato MF, e la linea AF sarà la divisoria per E contenuto da ZAF e ci rimane di tutto il pezzo EAC la porzione residua FAC di 125 che entra a far parte dell'altra porzione nel pezzo seguente. Si avverta che questo medesimo taglio può farsi con la divisione alla rovescia, servendoci di AC per lato di appoggio e dello apparecchio interno moltilatero che nasce stendendo MN sopra il lato di appoggio.

Per dare ad F la porzione 300 perchè ne abbiamo 125 nel residuo GAF, perciò gli altri 175 li prenderemo nell'ultimo pezzo. E perchè servendoci di AC per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà CR, non RP, ma sarà PD ed essendo PD parallelo con AC, così ci serviremo del taglio in forma di capotagliato. E poichè questi due lati paralleli non sono uniti ad un terzo lato con angoli retti, così noi gli uniremo facendo a questo modo. Dallo estremo più lungo C si tiri la perpendicolare CQ finchè s'incontra col prolungamento di DP in Q, ed avremo perciò il pezzo straniero CQP che bisogna calcolare e che forma l'apparecchio straniero quadrangolare. Per calcolarlo dall'angolo R si tiri RS, e servendoci delle linee di riduzione sapremo che essendo il punto C distante dal punto A per lo intervallo 18, così perchè DP è di 16, sarà PQ di 2 e per l'istessa ragione sarà RS di 4; di più sapremo QS di 12 ed SC di 8; donde si conchiude che il capotagliato QR avrà di quadratura 36, moltiplicando i due lati paralleli per la metà dell'altezza e che il triangolo RSC ne avrà 16, e quindi tutto l'apparecchio straniero quadrangolare PQC sarà 52 come è manifesto.

Eseguito questo, noi uniremo il di più 175 di F e lo apparecchio 50, ed avremo la somma 227. Questa somma si divida per 10 metà del lato divisore CQ, ed il quoziente sarà $22 \frac{7}{10}$, dal quale tolto via il lato intero di appoggio AC di 18, il residuo $4 \frac{7}{10}$ darà la lunghezza contata sopra dell'altro lato opposto parallelo QG, e la linea AG sarà la divisoria per F contenuta da GAF. Finalmente l'ultimo residuo di questa divisione contenuto da GAD di 133 sarà la porzione di G. Si avverta intanto che questa ultima porzione

potera stabilirsi col taglio alla rovescia, servendoci di AD per lato di appoggio e di PD per quello d'incidenza.

24. **DIVIDERE QUALSIVOGLIA FIGURA CHE ABBA UN LATO CURVO.** Siccome la quadratura del cerchio non può aversi mai esatta, così lo stesso accade per la quadratura di ogni altra figura curvilinea. Da questo nasce che la divisione eseguita nelle figure che abbiano un lato curvo, non può avere una geometrica esattezza, ma ci contenteremo solamente che il piccolo errore che inevitabilmente accader suole, sia di poco momento e da non farne caso. Intanto egli è da osservarsi che la curvità di un lato di qualsivoglia figura potendo presentare al campo della figura o la sua concavità o la sua convessità, così due casi potrebbero accadere o che le divisorie terminassero nella concavità o nella convessità. Ed affinchè con un solo esempio si veggia la pratica di questi due casi, noi divideremo una figura che abbia un lato serpeggiante, nel quale si avrà la concavità e la convessità, e vedremo il metodo che occorre per la direzione delle divisorie.

5. 33. Sia dunque la figura ABDC che abbia un lato BD serpeggiante e che debba dividersi in cinque porzioni dall'angolo A. Poichè questo angolo è retto, così le linee dei quadranti saranno i lati istessi AC, AB della medesima figura. Si faccia inoltre la riduzione interna necessaria acciò si possa avere la quadratura totale che sarà $773 \frac{1}{2}$, la quale sia divisa in cinque porzioni, delle quali sia A di 100, B di 150, C di $156 \frac{1}{2}$, D di 240 ed E di 117 e che AB debba essere il lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione di 100 perchè la divisoria non tocchi BG, ma un punto di GE, così stimando noi senza errore sensibile la curva EG per una linea retta, la stenderemo per GF ed avremo l'apparecchio interno triangolare GFB che bisogna calcolare. Per sapere in primo luogo la base FB dal punto E si abbassi la perpendicolare la quale si unisce con l'estremo B, giacchè i punti E e B sono ad uguale distanza dal lato AC, indi si tiri HI, e dalle linee della riduzione conosceremo EI di 4, IH di 1, IB di 10 e si cerca BF, dicendo così. Come EI di 4 sta ad IH di 1, così tutto EB di $14 \frac{1}{2}$ a BF che si trova $3 \frac{1}{2}$, rimanendo poi il resto del lato FA di $24 \frac{1}{2}$. Ora essendo la base FB di $3 \frac{1}{2}$ e l'altezza 5, la sua quadratura sarà $8 \frac{3}{4}$, moltiplicando la base per la metà dell'altezza. Questo apparecchio interno $8 \frac{3}{4}$ si sottragga dalla parte 100, ed il residuo $91 \frac{1}{4}$ si divida per $12 \frac{1}{4}$ metà di AF, ed il quoziente $7 \frac{27}{49}$ darà l'alzata interna FK, la parallela KL, e la linea AL sarà la divisoria per A contenuta da LAB.

Per dare a B la porzione 150 perchè la sua divisoria non tocca la curvità GB, non GE, ma cade in EM, e stimando questo lato curvo EM senza errore sensibile come linea retta la quale è convergente col lato di appoggio al di fuori della figura, così stenderemo ambidue, li uniremo in N, e ne nasce il pezzo EGBN che bisogna calcolare, e sarà questo l'apparecchio straniero angolare multilatero. Questo pezzo straniero viene formato dal triangolo EBN e dal pezzo mistilineo EGB. Per calcolare questo pezzo mistilineo si faccia così. Abbiamo il parallelogrammo rettangolo EQ, la cui quadratura è 112 che abbraccia i tre capotagliati ed il pezzo mistilineo straniero. Ora sommando la quadratura de' tre capotagliati ritroveremo essere $97 \frac{1}{2}$; quindi sottraendo questa quadratura $97 \frac{1}{2}$, da 112 totale quadratura del parallelogrammo EQ, il residuo $14 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura dello straniero mistilineo. Si deve ora calcolare il triangolo EBN, supponendo il lato curvo EMD come un prolungamento rettilineo di NE. Per ritrovare la base BN si dica così. Come DR di 8 sta ad RM di 4. così tutto DQ di 30 a tutto QN che si trova 15. E poichè QB è di 8, sarà BN di 7. Saputa la base, si conosce l'altezza essere $1 \frac{1}{4}$ dalle linee di riduzione; per cui moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 49 sarà la quadratura del triangolo. Unendo dunque la quadratura del triangolo con la quadratura dello straniero mistilineo avremo la somma $63 \frac{1}{2}$ per lo apparecchio straniero EGBN.

Per tagliare adunque la parte di B di 150 uniremo insieme questa parte, la parte di A e la quadratura dello apparecchio straniero, ed avremo la somma $313 \frac{1}{2}$ la quale divisa per $17 \frac{1}{2}$ metà di tutto AN, il quoziente $17 \frac{3}{5}$ darà l'alzata BO, la parallela OP, e la linea AP sarà la divisoria per B.

Per dare a C la porzione 156 $\frac{1}{2}$ poichè la sua divisoria tocca un punto di MD, e supponendo DME senza errore sensibile come una linea retta, così non essendo la medesima unita al lato di appoggio, noi stenderemo ambidue in N e ci serviremo del medesimo apparecchio straniero multilatero. Quindi unendo insieme la parte di A, di B, di C e lo apparecchio straniero, avremo la somma di 470 la quale divisa per $17 \frac{1}{2}$ metà di tutto AN, il quoziente $26 \frac{6}{7}$ darà l'alzata BS, la parallela ST, e la linea AT sarà la divisoria per C.

Per dare a D la porzione 240 poichè servendoci del lato di appoggio AB, quello d'incidenza sarà CD, ed essendo

questi due lati fra loro paralleli, così noi taglieremo questa porzione in forma di capotagliato facendo così. Dall'estremo più lungo B si tiri la perpendicolare BV uguale e parallela ad AC, ed indi si unisca con CD prolungata per DV. Fatto questo, avremo due pezzi stranieri EVD ed EBG che bisogna calcolarli, ed avremo così a servirci dell'apparecchio straniero quadrangolare. La quadratura dello straniero EBG si ha dall'antecedente operazione, ed è di $14 \frac{1}{2}$; solamente bisogna calcolare EVD nella seguente maniera. Abbiamo il parallelogrammo rettangolo DE, la cui quadratura è di 128 che abbraccia i tre pezzi interiori e lo straniero. Ora sommando i tre pezzi interiori, ritroveremo essere 66; perciò sottraendo questa somma da 128 totale quadratura del parallelogrammo DE, il residuo 62 sarà lo straniero mistilineo. Unendo dunque i due stranieri avremo $76 \frac{1}{2}$ per quadratura di tutto l'apparecchio straniero quadrangolare DVEB.

Per tagliare ora la parte di D di 240 uniremo insieme questa parte, quella di A, di B, di C e l'apparecchio straniero quadrangolare, ed avremo la somma 723, la quale divisa per 15 metà del lato divisore BV, avremo per quoziente $48 \frac{1}{3}$, dal quale tolto via il lato di appoggio AB, il residuo $20 \frac{1}{3}$ darà l'altro lato VZ, e tirata AZ, la medesima sarà la divisoria per D contenuta da ZAT. Il resto della figura espresso per ZAC di 117 sarà l'ultima porzione di E, come è facile a vedersi.

Questi esempi stimiamo sufficientissimi per la divisione de' trapezii ad angoli rientranti, essendosi mostrate tutte le pratiche dei casi possibili che potranno accadere. Intanto egli è a considerarsi che tutti i problemi della divisione finora eseguiti hanno supposto sempre che nel punto divisorio cominciassero tutte le porzioni, nelle quali una figura sia divisa. Occorrendo che ciascheduna di queste porzioni debba possedersi da un diverso padrone, così sarà necessario di stabilire in questo punto divisorio uno sfogo libero acciò l'uso di una porzione non arretrasse fastidio all'altra. Questo è per appunto il problema seguente.

25 DATO UN RICOVERO, COSTITUITO D'INTORNO UNO SPAZIO LIBERO E CALCOLARNE LA QUADRATURA DI TUTTO E L'AMBITO RETTILINEO. Acciocchè si possa intendere bene la natura di questo problema, egli è necessario di avvertire alle cose seguenti. Avendo finora eseguita la divisione de' territorii, questa si è fatta sempre da un punto, in modo che tutte le porzioni, nelle quali viene diviso un territorio, si uniscono tutte nel medesimo punto. Dovendo servire cia-

scheduna di queste porzioni a persone diverse, non ci è in questo punto divisorio lo sfogo comune, per cui ognuno potesse entrare nella sua porzione senza incomodare il suo vicino. Questa è la ragione, per cui noi stabiliamo il presente problema, il quale va inteso nella maniera seguente. Supponiamo che molte persone si prendano un territorio da pascolo e che con i loro rispettivi armenti siano uniti nel mezzo del territorio. Si stabilisce in questo luogo il ricovero *ABDC* distinto in più luoghi, in ogni uno dei quali entra al riposo l'armento stabilito. Questo ricovero si dice *Ascio* dai Pugliesi che è lo stesso di *Agio* dinotante un comodo ricovero.

Fig. 34

Fatto questo, se il territorio d'intorno venga diviso, anche in questo caso non sarà facile a ciascheduno armento, uscendo dall'*Ascio*, di entrare a pascolare la sua porzione senza calpestare la porzione altrui. Quindi si stabilisce intorno all'*Ascio* uno spazio libero in giro, comune a tutti, affinchè uscendo dall'*Ascio*, abbia libero il camino d'intorno finchè possa entrare nella sua porzione senza offendere le porzioni altrui. Ora questo spazio libero e comune si stabilisce con la regola seguente. Il lato *AB* dell'*Ascio* si distenda in diretto da ambedue le parti in *K* ed in *I* in maniera che *BK*, *AI* sieno sempre di 10 passi ciascheduna. Lo stesso si faccia per *CD* con i prolungamenti *DM*, *CL* anche ciascheduno di 10 passi. Inoltre gli altri due lati dell'*Ascio* *AC*, *BD* si allungino della istessa quantità per *BF*, *DH* e per *AE*, *CG*, e dipoi tutti gli estremi si chiudano con le rette *EFKMHGLI*; per cui lo spazio intero compreso tra questo ambito fatto da otto linee rette e l'*Ascio* costituisce lo spazio libero e comune a tutti e che col nome di *CAMPANA* viene chiamato.

Bene intesa adunque la posizione dell'*Ascio* e la costruzione della *Campana*, si cerca di calcolare la quadratura di tutta la rappresentazione e la lunghezza in giro dell'ambito rettilineo, ossia il perimetro della medesima. Per calcolare la quadratura del tutto egli è facilissimo. Imperciocchè essendo *AB* di 30 ed *AC* di 20 e moltiplicando l'uno per l'altro avremo la quadratura 600 del solo *Ascio* *ABDC*. Dippiù essendo *EF* di 30 ed *EA* di 10, avremo per *EB* la quantità 300, per *GH* anche 300; sarà poi *AL* di 200 e *BM* anche 200, sarà dippiù il triangolo *FBK* di 50, *MDH* di 50, *GGL* di 50 ed *IAE* di 50. Unite tutte queste quantità, avremo la somma 1200 che costituisce la quadratura della *Campana*. Ora essendo 600 la quadratura dell'*Ascio* e 1200 la quadratura della *Campana* o sia dello

spazio in giro, la loro somma 1800 sarà la quadratura di tutto lo sfogo e della intera rappresentazione.

Per conoscere poi la lunghezza dell'ambito rettilineo ossia il perimetro della intera Campana egli è facilissimo. Si numerano prima le lunghezze dei lati de' quattro parallelogrammi che sono EF di 30, KM di 20, HG di 30, LI di 20 e che sommati fanno 100; indi dei quattro triangoli laterali conoscendosi i cateti, si calcoleranno le quattro ipotenuse delle quali ciascheduna sarà 14 e tutte quattro fanno 56, quale numero unito a 100, avremo 156 per tutto l'ambito. Ora per la esecuzione del presente problema avremo 1800 per quadratura della intera Campana e 156 per la lunghezza in giro del suo perimetro rettilineo e così avremo formato lo sfogo libero e comune a tutte le porzioni.

26. DIVIDENDO QUALSIVOGLIA FIGURA, STABILIRE NEL PERIMETRO DELLA CAMPANA L'APERTURA PROPORZIONATA ALLE PARTI DIVISE. Sia un parallelogrammo rettangolo CDIH da dividersi dal punto A, nel quale bisogna lasciare l'Ascio e la Campana. Primieramente si tirino le due linee dei quadranti BG, EF le quali dividono la figura in quattro pezzi e si misurino i lati convenienti per avere la quadratura di ciascheduno di essi, e la totale quadratura che si trova in questo caso 31816, si noti da parte. Fatta questa prima operazione, si deve in seguito stabilire l'Ascio e la Campana. L'Ascio posto in A abbia 40 di lunghezza e 20 di larghezza ed avrà perciò 800 di quadratura. Inoltre si costruisca intorno all'Ascio lo spazio libero col menare da ciaschedun angolo dell' Ascio le distanze di 10 passi e con chiudere il tutto con le solite otto linee rette, ed avremo per lo spazio libero in giro 1400 di quadratura. Unendo dunque queste due quadrature, la somma 2200 sarà la quadratura della intera Campana ed avrà 126 per l'ambito in giro.

La quadratura 2200 della intera Campana si sottragga dalla quadratura totale 31816 di tutto il dato parallelogrammo, ed il residuo 29616 sarà la quadratura netta che si dovrà dividere in sette porzioni, delle quali A sia di 3050, B di 4660, C di 4506, D di 2400, E di 6000, F di 5000 e G di 4000, principiando la divisione dal punto O e che sia OB il primo lato di appoggio.

Prima d'incominciare la divisione egli è mestieri di ben capire l'uso del perimetro della Campana. Poichè tutto questo perimetro è di 176, così si deve distribuire questo ambito nelle sette porzioni che entrano nella divisione, e questa tale distribuzione dovrà farsi proporzionata alla quantità di ciascheduna. Per questo calcolo distributivo noi ci

serviremo della semplice regola di società e supponiamo già eseguito il tutto; pereui conosceremo che incominciando a contare da O, spetta alla porzione di A l'apertura lunga OK di 18, a B l'apertura KLN di 27, a C l'apertura NP di 26, a D l'apertura PQ di 15, ad E l'apertura QXY di 36, ad F l'apertura YGZ di 29 ed a G l'apertura ZNO di 25, le quali sommate insieme fanno tutto l'ambito ossia perimetro 176. Ritrovate così queste distanze in giro si segnano nei punti O, K, N, P, Q, Y, Z, quali punti vengono chiamati CAPOMATTONI, dai quali dovrà tirarsi la divisoria per ogni porzione nel modo seguente.

Per dare ad A la sua parte 3050 poichè questa quantità ha per sua rata dell'ambito la lunghezza OK di 18, perciò si tiri la parallela KP, ed essendo KP di 62, sarà tutto il parallelogrammo OP di 1116; pereui il dippiù 1934 della porzione di A lo prenderemo dall'altra parte, servendoci di KP per lato di appoggio e di PD per lato d'incidenza. Diviso dunque 1934 per 31 metà di KP, il quoziente 62 $\frac{14}{31}$ darà PQ, e la linea KQ sarà la divisoria per la porzione di A. Fatto questo, essendosi levato 3050 dal primo pezzo, ci è rimasto il residuo 3612 il quale serve per l'altra porzione.

Per dare a B la parte 4660 si osservi che avendone un residuo 3612 nel primo pezzo, il dippiù 1048 lo dobbiamo togliere dal pezzo seguente. E poichè la rata dell'ambito per B ha per lunghezza KLN di 27, ed essendo KL di 16 nel primo pezzo, ci resta LN di 11 in questo altro pezzo: Quindi tirata la parallela NM di 66, avremo il parallelogrammo NF di 726. E poichè B deve avere 4660, così l'ultimo residuo 322 sarà quello che taglieremo, servendoci di NM per lato di appoggio e di MI per lato d'incidenza. Diviso dunque 322 per 33 metà di NM, il quoziente 9 $\frac{25}{33}$ darà MO, e la linea NO sarà la divisoria per B.

Per dare a C la porzione 4506 poichè questa ha per rata dell'ambito NP di 26, così si tiri dal suo Capomattone la parallela PS di 62, e sarà PX di 17, ed avremo il parallelogrammo XS di 1054. Ora da tutto il pezzo GF essendosi levato prima LO di 1048, ci rimane 6934, e da questo togliendosi ancora XS di 1054, ci resta nel mezzo SO la quantità 5880, e perchè C deve avere solamente 4506, così l'avanzo 1374 sarà quello che taglieremo alla rovescia servendoci di PS per lato di appoggio e di SI per lato d'incidenza. Diviso dunque 1374 per 31 metà di PS, il quoziente 44 $\frac{10}{31}$ darà ST, e tirata PT, la medesima sarà la divisoria per C contenuta da PTIO.

Per dare a D la porzione 2400 si osservi che il Capomattone di D essendo in Q distante 15 da P, ed avendo tirata QR di 62, avremo il parallelogrammo RP di 930, e pe' l' triangolo PST avremo 1374, e che uniti insieme fanno 2304. E perchè D deve avere 2400, così il dippiù 96 lo prenderemo dall'altra parte, e sarà QR il lato di appoggio ed RH il lato d'incidenza. Diviso adunque 96 per 31 metà di QR, il quoziente $3\frac{1}{3}$, darà RV, e la linea QV sarà la divisoria per D compresa da QVTP.

Per dare ad E la parte 6000, la sua rata dell'ambito essendo QXY di 36 ed il punto Y il suo Capomattone, così dal medesimo si tiri YS di 68, ed essendo SE di 20, avremo il parallelogrammo YE di 1360. Inoltre tutto il pezzo EG essendo 8166, al medesimo uniremo il picciolo parallelogrammo XQRG di 124, ed avremo tutto il pezzo ER di 8290. Da questo togliendone 96 pel triangolo QVR, ci resta 8194, e da questo tolto via YE di 1360, ci rimane il dippiù nel mezzo 6834. Ora perchè E deve avere 6000, così il dippiù 834 solamente taglieremo alla rovescia, servendoci di YS per lato di appoggio e di SH per lato d'incidenza. Diviso adunque 834 per 34 metà di YS, il quoziente $24\frac{1}{7}$, darà SZ, e la linea YZ sarà la divisoria per E contenuta da YZVQ.

Per dare ad F la porzione 5000 poichè la rata dell'ambito è di 29 ed il suo Capomattone cade in Z, perciò si tiri ZT di cui si deve calcolare la lunghezza. Per calcolarla si dica per primo: se la ipotenuza GN cala un cateto 10, la porzione GZ di 9 calerà l'altezza $6\frac{3}{7}$ che corrisponde ad ET. Calcolata l'altezza, si calcoli l'avanzo di lunghezza di TZ sopra EG, dicendo così. Se il lato che si alza da G di 10 si allarga sino ad N anche di 10, la porzione compresa da G sino alla linea TZ che è di $6\frac{3}{7}$, allargherà sino a Z anch'è $6\frac{3}{7}$, e perchè EG è di 68, sarà TZ di $74\frac{1}{7}$. Ritrovata così la lunghezza e l'altezza del capotagliato GZTE, avremo per sua quadratura 458. Quindi unendo insieme questo capotagliato 458, il parallelogrammo EY di 1360 ed il triangolo YSZ di 834, avremo la somma 2652. Ora perchè F deve avere 5000, così il dippiù 2348 lo taglieremo dall'ultimo pezzo EB, e sarà ZT il lato di appoggio e TC il lato d'incidenza. Diviso adunque 2348 per $37\frac{3}{14}$ metà di ZT, il quoziente $63\frac{49}{51}$, darà TL, e la linea ZL sarà la divisoria per F contenuta da LZYZ. Finalmente il resto CLZOB di 4000 sarà l'ultima porzione che spetta a G, che ha di rata dell'ambito ZNO di 25, come è manifesto.

Tutte le regole esposte per la divisione ordinaria sono quelle il cui uso è perpetuo quantevolte porta l'occasione di eseguire questi problemi. Intanto egli è a considerarsi che questi tagli già fatti in tanti modi diversi si sono eseguiti con tutta la facilità nel disegno in dove si avea sotto l'occhio tutta l'unione delle linee che doveano servire alla operazione; ma dovendosi poi porre in pratica nella campagna, allora queste linee scompaiono, e l'operatore potrebbe ritrovarsi in un sensibile imbarazzo. Quindi nasce la necessità di manifestare quei mezzi e quelle regole, con le quali noi possiamo effettivamente eseguire ogni divisione ed ogni taglio da praticarsi in campagna e nel misurato e configurato territorio. Si fatte regole che esporremo, egli è a sapersi che si debbano anticipatamente fare nel disegno, e poi l'effettiva esecuzione secondo ritroveremo nei loro risultati, con gl'istrumenti agrimensorii la praticheremo nella campagna.

27 NEL TIRARE LE DIVISORIE, DETERMINARE DA LONTANO IL PUNTO DELLA INCIDENZA SENZA CAMMINARLO. Acciocchè s'intenda perfettamente la natura di questo problema, egli è necessario di rammentare che la divisione accadendo in qualsivoglia figura, le porzioni che si tagliano, vengono staccate tutte a triangoli rettangoli, da' quali il lato di appoggio è sempre un cateto e l'alzata è l'altro cateto che si cammina e che è tanto lungo per quanto esprime il quoziente della divisione. Affilando dunque l'estremo di questo secondo cateto con l'estremo del primo in cui risiede il punto divisorio, la linea tirata tra questi due punti sarà la divisoria. Per tirare adunque la divisoria ben si vede che il secondo cateto bisogna camminarlo indispensabilmente con la misura, e perchè per gl'intoppi del suolo e per la sua lontananza dal punto divisorio recherebbe della fatica, perciò si è ritrovato un altro metodo come tirare la divisoria senza camminare questo lato secondo perpendicolare, bastando solamente di averlo calcolato, ed il tutto si eseguisce nel modo seguente.

Rappresenti AB un lato di appoggio come primo cateto di un triangolo rettangolo che debba avere di quadratura 600, e sia AB di 40 ed A il punto divisorio. La quadratura 600 si divida per 20 metà di AB, ed il quoziente 30 darà la lunghezza dell'altro lato o sia cateto BC, dal cui estremo C tirato CA, la medesima sarà la divisoria per 600 di quadratura. Ora in questa operazione ben si vede che per determinare lo estremo C sarà uopo di effettivamente camminare e misurare la lunghezza BC di 30. Intanto per ri-

Fig. 36.

sparmiarci questa fatica noi faremo così. Dal punto divisorio A si cammini 10 passi o quanto si voglia, sino in D e quivi si faccia una regola semplice del tre, dicendo. Se tutto AB di 40 da per altezza BC di 30, la porzione camminata AD di 10 quanto alzerà di perpendicolo? Fatto il calcolo, si trova l'altezza $7\frac{1}{2}$; perciò posto in D lo squadro si collinei una visuale DE, e camminato $7\frac{1}{2}$, il punto E sarà l'estremo. Affilando dunque dal punto A per E la linea che per questi due punti si tira, anderà a toccare lo estremo C del lato BC. Questa pratica che altrove abbiamo chiamata REGOLA DEL TRE, ci sarà di guida per tutte le divisioni che noi eseguiremo nella campagna dopo averla determinata nel disegno.

Fig. 37. 28 DIVIDERE UN TERRITORIO CON FAR USO DELLA REGOLA DEL TRE. Sia il territorio FGIH da dividersi in quattro porzioni dal punto A. Si ponga in A lo squadro, e si tirino e si misurino le linee visuali de' quadranti BC, DE che si intersecano ad angoli retti in A o sia nel centro dello squadro. Fatto questo, poichè il territorio è un parallelo gramm rettangolo verrà diviso in quattro altri minori parallelogrammi, ed avremo di ciascaduno di essi la quadratura. Sarà dunque AG di 1182, AI di 925, AH di 525 ed AF di 672 i quali sommati insieme fanno 3306 che dinota la totale quadratura dell'intero parallelogrammo. Questa quadratura va divisa in quattro porzioni in maniera che sia A di 800, B di 960, C di 647 e D di 899. Queste porzioni che poi si tagliano nel campo della figura, sono chiamate dai pratici col nome di ANITI. Finalmente la prima divisoria sia AB la quale si dice FITTAMORTA: giacchè dalla medesima principiano le porzioni, e girando intorno al punto divisorio nella stessa linea vanno a terminare.

Per dare ad A la sua parte 800 poichè questa quantità supera la metà del primo pezzo AG di 1182, perciò servendoci della Fittamorta AB per lato di appoggio, quello d'incidenza non sarà BG ma sarà GE, perciò la taglieremo a capotagliato nel disegno, facendo così. Si divida 800 per $18\frac{1}{2}$ metà del lato divisore BG, e dal quoziente 43 si sottragga AB di 32, ed il residuo 11 darà la lunghezza GK dell'altro lato parallelo ed il punto K. Per tirare poi nella campagna la divisoria AK noi ci serviremo della regola del tre, facendo così. Dal punto A si cammini sopra l'altra linea de' quadranti AE la porzione AN di 10, e giunto in N, si dica. Come AE di 37 sta ad EK di 21, così la porzione AN di 10 all'altezza NO che sarà $5\frac{1}{4}$. Si ponga in N lo squadro, ed affilando la visuale NO,

si cammini per $5\frac{1}{4}$ sino ad O : indi collineando i due punti A ed O, la linea tirata per essi anderà a toccare il punto K e sarà la divisoria per la porzione di A.

Per dare a B la sua parte 960 poichè ne abbiamo 382 nel triangolo AKE, così il resto 578 lo taglieremo dall'altro pezzo anche a capotagliato. Diviso adunque 578 per $12\frac{1}{2}$ metà del lato divisore EI, e dal quoziente 46 sottratto AE di 37, il residuo 9 darà IL ed il punto L nel disegno. E perchè tutto IC è di 37, così CL sarà 28. Per tirare poi nella campagna la divisoria senza bisogno di camminare con la misura tutto CL si faccia così. Dal punto A si cammini AP di 10, e nel punto P si ponga lo squadro secondo il solito, e si affili la visuale PQ, ed indi si dica. Tutto AC di 25 sta a tutto CL di 28 come AP di 10 a PQ che sarà $11\frac{1}{5}$. Si cammini dunque PQ di $11\frac{1}{5}$, ed affilando i due punti A e Q, la linea tirata per essi toccherà il punto L e sarà la divisoria per B.

Per dare a C la sua parte 647 perchè ne abbiamo 347 nel triangolo ACL, così il dippiù 300 lo dobbiamo prendere nell'altro pezzo ed anche a capotagliato. Si divida dunque 300 per $10\frac{1}{2}$ metà del lato divisore CH, e dal quoziente 29 in circa sottratto AC di 25, il resto 4 indica la lunghezza HM ed il punto M nel disegno : e perchè tutto HD è di 25, così resta MD di 21. Per tirare poi nella campagna la divisoria dal punto A si cammini sopra AD la porzione AR di 10, ed ivi si ponga lo squadro, del quale una linea de' quadranti collinei AD e l'altra affili l'altra visuale RS, ed indi si dica. Tutto AD di 21 sta a tutto DM di 21 come la parte AR di 10 alla visuale RS che sarà anche 10. Quindi collineando i due punti A ed S, e pei medesimi tirata la divisoria, questa istessa terminerà nel punto M dove si voleva. Finalmente il resto della figura 899 contenuta da MFBA sarà la porzione spettante a D come è manifesto.

29. DATO IL PUNTO D'INCIDENZA PER UNA DIVISORIA SOPRA DI UN LATO OBLIQUO, RITROVARE IL PUNTO PERPENDICOLARE CORRISPONDENTE SUL LATO DI APPOGGIO E LA DISTANZA DEL MEDESIMO DAL PUNTO DIVISORIO ACCIÒ SI FACCIA USO DELLA REGOLA DEL TRE. Per intendere bene questo problema egli è necessario di rammentarsi che ogni qualvolta accade una divisione in campagna da un dato punto, noi facciamo uso della regola del tre per dirigere la linea divisoria. Ora questa regola sempre suppone che il lato della incidenza sul quale va a terminare la divisoria, sia perpendicolare al lato di appoggio come abbiamo eseguito nell'antecedente pro-

blema, giacchè la regola suppone un triangolo rettangolo del quale la ipotenusa è la divisoria, un cateto il lato di appoggio e l'altro cateto il lato d'incidenza. Ma per lo più avviene che il lato d'incidenza non sia perpendicolare al lato di appoggio ma obliquo o approssimante, ovvero sfuggente, ed in questo caso sebbene con le linee straniere noi troviamo il punto della incidenza sulle figure eseguite nel disegno, non potremo poi nella campagna far uso della regola del tre per la direzione della divisoria, mancandoci il cateto perpendicolare della incidenza.

Questa è la ragione, per cui abbiamo bisogno della esecuzione di questo problema acciò si possano determinare e conoscere col calcolo anticipatamente due cose, delle quali la prima sarà di ritrovare sul lato di appoggio prolungato, se bisogna, il punto che corrisponda a perpendicolo col punto della incidenza per avere il primo cateto, e la seconda sarà di ritrovare la distanza da questo punto perpendicolare corrispondente sino al punto divisorio per avere l'altro cateto, ed in questo modo avendo il triangolo rettangolo potremo servirci speditamente della indispensabile regola del tre per dirigere le divisorie in qualsiasi caso che accadesse. Intanto per la esecuzione di queste due pratiche necessarie esporremo quattro casi generali, ben intesi i quali si eseguiscano facilmente tutti gli altri di simil grisa.

Fig. 38.

Sia in primo luogo il trapazio ABEFI, del quale la totale quadratura sia 753. Da questa se ne deve stoccare una porzione $321 \frac{1}{3}$ dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. Poichè in questo caso la divisoria non cade in BE, ma cade nel lato della incidenza EF, così per eseguire il taglio ci serviremo dell'apparecchio straniero angolare EDB, ed eseguendo il tutto secondo altrove abbiamo esposto, avremo per quoziente $15 \frac{1}{2}$ espresso per l'alzata CH; percui tirata la parallela HG, il punto G sarà il punto della incidenza, e la linea AG sarà la divisoria richiesta. Ora per potere dal punto A dirigere questa divisoria e servirci della regola del tre, sarà necessario in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto L sul lato di appoggio che corrisponda a perpendicolo col punto G della incidenza per avere il primo cateto GL che sarà $15 \frac{1}{2}$ comechè uguale all'alzata CH, e poi ritroveremo la distanza LA sul lato di appoggio per avere l'altro cateto.

Per ritrovare adunque il punto L bisogna ritrovare la lunghezza HG, facendo così. Tutto EK di 12 sta a tutto KF di 16 come la parte EH di $5 \frac{1}{2}$ alla distanza HG che si trova $7 \frac{1}{2}$. E poichè HG è uguale a CL, sarà

anche CL di $7 \frac{1}{3}$; e perchè CB è di 5, resterà BL di $\frac{2}{3}$. Ora essendo tutto il lato di appoggio AB di 35, sarà la porzione AL di $32 \frac{2}{3}$. Quindi del triangolo rettangolo ALG essendoci noti i due cateti AL, LG, potremo servirci della regola del tre per dirigere la divisoria AG nel punto G della incidenza.

Fig. 39. Sia in secondo luogo il capotagliato ABCH, di cui la quadratura intera sia 600 e dalla quale se ne debba tagliare una porzione 180 dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. In questo caso perchè la divisoria cade nel lato d'incidenza BC, così eseguendo questo taglio, avremo per quoziente 18 espresso dall'alzata BD, e tirata la parallela DE, il punto E sarà il punto d'incidenza e la linea AE sarà la richiesta divisoria. Ora acciò possiamo dal punto A con la regola del tre dirizzare questa divisoria, sarà d'uopo di ritrovare col calcolo il punto C che sta in diretto col prolungamento BG del lato di appoggio AB, e che questo punto G corrisponda a perpendicolo col punto E della incidenza per avere il primo cateto EG che sarà 18, perchè uguale all'altezza BD e poi ritroveremo la distanza GA sul lato di appoggio per avere l'altro cateto.

Per ritrovare il punto G bisogna ritrovare la lunghezza DE, facendo così. Tutto BF di 24 sta a tutto FC di 10 come la porzione BD di 18 alla lunghezza DE che si trova $7 \frac{1}{2}$. Ora essendo AB di 20, sarà tutto il lato AG di $27 \frac{1}{2}$, quindi del triangolo rettangolo AGE essendoci noti i due cateti GE, GA, sarà facile di far uso della regola del tre dal punto A per dirigere la divisoria AE nel punto E della incidenza.

Fig. 40. Sia in terzo luogo il trapezio ad angoli rientranti ABKDH del quale la totale quadratura sia 598. Dal medesimo se ne deve staccare la porzione 210 dal punto divisorio A, servendoci di AB per lato di appoggio. Poichè in questo caso la divisoria non cade in BK ma tocca il lato KD della incidenza, così per eseguire questo taglio ci serviremo dell'apparecchio interno triangolare KEB, ed eseguendo il tutto secondo le regole dinanzi esposte, avremo per quoziente 15 $\frac{1}{2}$ espresso per l'alzata EF; per cui tirata la parallela FG, il punto G sarà il punto d'incidenza e la linea AG sarà la richiesta divisoria. Ora per dirigere dal punto A questa divisoria e servirei della regola del tre, sarà mestieri in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto C sul lato d'appoggio prolungato che corrisponda a perpendicolo col punto G della incidenza per avere il primo cateto CG che sarà

$15 \frac{1}{2}$ perchè uguale all'alzata EF, e poi troveremo la distanza CA sul lato di appoggio per avere l'altro cateto.

Per ritrovare il punto C sarà d'uopo di ritrovare la lunghezza FG, dicendo così. La parte EI di 8 sta alla parte IK di 8, come tutto EF di $15 \frac{1}{2}$ a tutto FG che si trova anche $15 \frac{1}{2}$; e poichè EB è di 10, sarà BC di $5 \frac{1}{2}$, giacchè FG è uguale ad EC. Ora essendo AB di 32, sarà tutto il lato AC di $37 \frac{1}{2}$. Quindi del triangolo rettangolo ACG essendoci noti i due cateti CG, CA, sarà facile l'uso della regola del tre per dirigere dal punto A la divisoria AG che termina nel punto G della incidenza.

Fig. 41. Sia in quarto luogo il trapezio AGEI, di cui la intera quadratura sia 592. Dal medesimo se ne debba tagliare dal punto A la porzione 120 in maniera che la divisoria cada nel lato GE della incidenza. Per eseguire questo taglio noi ci dobbiamo servire inevitabilmente dello apparecchio straniero laterale ABG, ed eseguendo il tutto secondo le regole esposte in altro luogo, avremo per quoziente $33 \frac{1}{4}$ espresso per l'alzata BD; per cui tirata la parallela DC, il punto C sarà il punto d'incidenza e la linea AC sarà la divisoria ricercata. Ora per dirigere dal punto A questa divisoria e servirci della regola del tre sarà necessario in primo luogo di ritrovare col calcolo il punto H per avere il lato di appoggio AH, il cui estremo H corrisponda a perpendicolo col punto C della incidenza per avere il primo cateto HC che sarà $33 \frac{1}{4}$ comechè uguale all'alzata BD, e poi troveremo tutto il lato di appoggio HA per avere l'altro cateto.

Per trovare il punto H bisogna trovare la lunghezza DC, dicendo così. Tutto BF di 40 sta a tutto FE di 12 $\frac{1}{2}$, come l'altezza BD di $33 \frac{1}{4}$ alla lunghezza DC che si trova 10 $\frac{1}{3}$, ed essendo DC uguale a BH, sarà anche BH di 10 $\frac{1}{3}$, ed essendo AB di 9 $\frac{1}{2}$, sarà tutto AH di 19 $\frac{5}{6}$. Ora del triangolo rettangolo AHC essendoci noti i due cateti HC, HA, sarà facile in questo caso adattare al punto divisorio A la regola del tre per dirigere la divisoria AC al punto C della incidenza. E così abbiamo già terminate tutte le regole pratiche della divisione che si debbano eseguire nella campagna. Intanto non dobbiamo tacere diverse altre regole della divisione che si espongono nell'articolo seguente.

§. II.

LA DIVISIONE STRAORDINARIA

Quanto finora abbiamo esposto nella divisione ordinaria, egli è tutto quello che stabilisce il fondamento di questa speciosa parte dell'Agrimensura, e ci pone nelle circostanze di eseguire qualunque problema divisorio non solo nel disegno ma praticamente altresì nella campagna. Esporremo nella DIVISIONE STRAORDINARIA alcune altre regole che stabiliscono i tagli in differenti modi, come vedremo ne' seguenti problemi.

1. DATO UN PARALLELOGRAMMO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA PARALLELA AD UN LATO. Poichè i parallelogrammi possono essere rettangoli ovvero obbliquangoli, così due casi possono accadere. Diciamo intanto un parallelogrammo esserci noto quando ne sappiamo in misure l'altezza, la base e la quadratura. Intanto egli è da avvertirsi che ne' parallelogrammi rettangoli il lato perpendicolare che cade sopra la base, è lo stesso che la sua altezza; ma ne' parallelogrammi obbliquangoli se un lato è la base, l'altro lato non può essere la sua altezza, comechè obliquo; ma quest' altezza cadrà o dentro o fuori a perpendicolo sulla base e che bisogna prima calcolare per indi venire alla risoluzione del problema.

Fig. 42.

Sia in primo luogo il parallelogrammo rettangolo $ABDC$, di cui l'altezza AC sia 80 e la base CD sia 90 e tutta la quadratura sarà 7200, delle quali si cerca tagliarne la porzione 3000 con una divisoria parallela alla base CD . Per eseguire sì fatto taglio parallelo egli è a riflettersi che la porzione 3000 da tagliarsi rappresenta la quadratura di un parallelogrammo rettangolo, la cui base CD è di 90: altro dunque non si richiede che di ritrovarne la sua altezza. Quindi diviso 3000 per 90 che è la base, il quoziente $33 \frac{1}{3}$ darà l'altezza CE contata da C sopra il lato perpendicolare CA , e tirata poi dal punto E la linea EF parallela alla base CD , il parallelogrammo rettangolo $CEFD$ sarà di 3000 che era la porzione che si voleva tagliare.

Fig. 43.

Sia in secondo luogo il parallelogrammo obbliquangolo $ABDC$, di cui l'altezza calcolata BE sia di 70 e la base CD sia di 90, e tutta la quadratura sarà 6300. Da questa si cerca tagliarne una porzione di 2300 con una di-

visoria parallela alla base CD. Per eseguire si fatto taglio parallelo egli è a considerarsi che la porzione 2300 da tagliarsi rappresenta la quadratura di un parallelogrammo obliquangolo, la cui base CD è di 90; percui altro non si richiede che di ritrovare la sua altezza. Quindi diviso 2300 per 90 che è la base, il quoziente $32 \frac{6}{7}$ darà l'altezza, la quale non potendosi contare sopra il lato obliquo, CA darà l'alzata CF, la parallela FG e la linea GH parallela alla base CD e percui il parallelogrammo obliquangolo CGHD sarà di 2300 che era la porzione che si dovea tagliare.

2. DA UN TRIANGOLO NOTO TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA PARALLELA ALLA BASE. Poichè i triangoli possono rettangoli, acutangoli ed ottusangoli, così tre casi possono accadere nella risoluzione di questo problema. Intanto egli è a considerarsi che nel primo caso quando il triangolo sia rettangolo allora il lato perpendicolare che cade sopra l'altro, è lo stesso che l'altezza; ma nell'acutangolo che cade dentro, o negli ottusangoli che cade fuori, egli bisogna calcolare quest'altezza per indi venire alla risoluzione di questo problema. Supponiamo dunque che in qualsivoglia di questi tre casi si sappia o che sia prima calcolata l'altezza per indi poi operare nella maniera seguente.

Fig. 44. Sia in primo luogo il triangolo rettangolo ABC, di cui l'altezza AC sia 46 ed il suo quadrato 2116, la base BC di 21 e tutta la quadratura 483. Si cerca, contando dal vertice A, tagliarne una porzione 180 e che la divisoria sia parallela alla base BC. Per conoscere a qual punto di AC cada la divisoria, incominciando a contare da A, si faccia uso della regola seguente. Come la intera quadratura del triangolo 483 sta al quadrato 2116 di tutta l'altezza AC, così la parte 180 che si cerca di tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $788 \frac{276}{483}$ o sia allo ingrosso 788 $\frac{1}{2}$. Questo numero dinota il quadrato della lunghezza che da A si deve contare; percui estratta la radice $28 \frac{1}{4}$ presso a poco, la medesima darà AD; pereni tirando DE parallela alla base BC, avremo la divisoria per AED di 180.

Fig. 45. Sia in secondo luogo il triangolo acutangolo ABC, di cui l'altezza AD sia 45 ed il suo quadrato 2025, la base BC di 43 e tutta la quadratura 967 $\frac{1}{2}$. Si cerca, contando dal vertice A, tagliarne una porzione 315 con una divisoria parallela alla base BC. Per eseguirlo si deve trovare un punto nella perpendicolare, da cui si tira la divisoria, facendo uso della regola esposta. Come la quadratura del

triangolo $967 \frac{1}{2}$, sta al quadrato 2025 di tutta l'altezza AD, così la parte 315 che si vuol tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $659 \frac{187}{317}$, il quale divota il quadrato della lunghezza che si deve contare da A; per cui estratta la radice $25 \frac{34}{5}$, presso a poco, la medesima darà AE e poi la divisoria FG parallela alla base.

Sia in terzo luogo il triangolo ottusangolo ABC, di cui l'altezza AD sia 48 ed il suo quadrato 2304, la base BC di 30 e tutta la quadratura 720. Si cerca, contando dal vertice A, tagliarne una porzione 200 e che la divisoria resti parallela alla base BC. Per conoscere a qual punto di AD cada la divisoria, contando da A, si faccia uso della regola esposta. Come la quadratura del triangolo 720 sta al quadrato della sua altezza AD di 2304, così la parte 200 che si vuole tagliare, al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova 640 il quale rappresenta il quadrato della lunghezza che si deve contare da A: per cui estratta la radice $25 \frac{3}{10}$, la medesima sarà AE ed in conseguenza la divisoria FG parallela alla base.

3. DATO UN CAPOFAGLIATO NOTO, TERMINARLO IN TRIANGOLO E CALCOLARNE TUTTO LO STRANIERO. In questo problema tre casi possono accadere o che il capotagliato abbia un lato perpendicolare e sia perciò rettangolo, o che dai lati convergano al di sopra della base; per cui la perpendicolare tirata dal punto di convergenza cade sopra della base, o finalmente la convergenza di due lati porta il punto della convergenza fuori della base; per cui la perpendicolare cade anche al di fuori.

In quanto al primo caso, sia il capotagliato BCED rettangolo in E e che abbia BC di 19, DE di 32, l'altezza CE di 20 e tutta la quadratura 510. Per terminarlo in triangolo si continui EC sino ad A dove s'incontra col prolungamento di DB, ed avremo il triangolo straniero ABC del quale sappiamo la sola base BC di 19. Si cerca l'altezza CA e la sua quadratura. Per trovare l'altezza si faccia così. Da B si cali BF perpendicolare a DE che sarà uguale e parallela a CE e che taglia di DE la parte FD di 13. Si dica dunque. Come DF di 13 sta ad FB di 20, così tutto DE di 32 a tutto EA che si trova $49 \frac{3}{13}$. E poichè EC è di 20, così il resto CA sarà $29 \frac{3}{13}$. Avuto questo, si moltiplichi la base BC per la metà dell'altezza CA, ed il prodotto $277 \frac{9}{13}$ sarà la quadratura richiesta.

In quanto al secondo caso, sia il capotagliato BDGE, i cui lati EB, GD convergono al di sopra della base, ed il medesimo abbia BD di 23, EG di 43, l'altezza FG

di 20 e tutta la quadratura 660. Per terminarlo in triangolo si continui EB, GD finchè si uniscono in A, ed avremo il triangolo straniero ABD, di cui sappiamo la sola base BD di 23. Si cerca l'altezza CA e la sua quadratura. Per trovare l'altezza CA si faccia così. Dal punto C si tiri CH parallela a BE, indi CI parallela a DG, ed avremo EH uguale a BC ed IG uguale a CD, e sarà HF di 12, FI di 8 e tutto HI di 20. Quindi diremo. Come HI di 20 sta ad FC di 20, così tutto FG di 43 a tutto FA che si trova 43 come è chiaro. E poichè FC è di 20, così il resto CA sarà 23. Avuto questo, si moltiplichì la base BD per la metà dell'altezza CA, ed il prodotto $264 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura.

13. 49. In quanto al terzo caso, sia il capotagliato BCED, i cui lati DB, EC convergono al di fuori della base e che abbia BC la lunghezza 17, DE sia 33, l'altezza CG di 20 e tutta la quadratura 500. Per terminarlo in triangolo i due lati convergenti DB, EC si distendono finchè si uniscono in A ed avremo il triangolo straniero ABC, del quale sappiamo la sola base BC di 17. Si cerca la sua altezza AL e la sua quadratura. Per trovare l'altezza poichè la figura è obliqua, perciò la perpendicolare AF cade fuori della base. Indi dal punto C si tiri la perpendicolare CG e si misuri EG e sia 12, e GF e sia 13. Si dica dunque. Come EG di 12 sta a GC di 20, così tutto EF di 25 a tutto FA che si trova $41 \frac{2}{3}$. Si tolga da questa l'altezza FL uguale a GC di 20, resta LA di $21 \frac{2}{3}$ per l'altezza del triangolo straniero. Si moltiplichì dunque la base BC per la metà dell'altezza LA, ed il prodotto $184 \frac{1}{6}$ sarà la quadratura.

4. DATO UN CAPOTAGLIATO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA PARALLELA ALLA BASE. Nella risoluzione di questo problema tre casi possono accadere, o che il capotagliato abbia un lato perpendicolare, o che due lati convergono al di sopra della base, o finalmente che due lati convergono al di fuori della medesima.

50. In quanto al primo caso, sia il capotagliato BCED, il quale abbia BC di 24, DE di 46, l'altezza CE di 28 e la sua quadratura 980. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 180 con una divisoria parallela alla base DE. Per vedere da quale punto della perpendicolare CE si deve tirare la divisoria, cegli è necessario che il capotagliato diventi triangolo come ADE; per cui abbiamo il triangolo straniero ABC, del quale sappiamo la base BC di 24. È mestieri dunque che conosciamo l'altezza CA e tutta la sua quadratura. Per sapere tutto questo noi ci serviremo dell'antecedente problema e conosceremo l'al-

tezza CA $30 \frac{6}{11}$, e la quadratura dello straniero $366 \frac{6}{11}$. Eseguito tutto questo apparecchio e perchè si deve stoccare dal capotagliato la parte 180, noi a questa quantità uniremo la quadratura straniera ed avremo la somma $546 \frac{6}{11}$, che si dovrà tagliare, contando dal vertice A. Per eseguirlo faremo uso della solita regola. Come tutta la quadratura $1346 \frac{6}{11}$ del triangolo intero ADE sta al quadrato $3427 \frac{759}{1331}$ di tutta l'altezza EA, così la parte $546 \frac{6}{11}$, che si vuol tagliare, composta da 180 e dallo straniero al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $1391 \frac{1}{4}$ presso a poco il quale rappresenta il quadrato della lunghezza che si deve contare da A; per cui estratta da questo, numero la sua radice $37 \frac{23}{74}$ presso a poco, la medesima darà AF, e perchè AC come straniero, è $30 \frac{6}{11}$, così il doppio $6 \frac{3}{4}$ lo conteneremo da C sino ad F, e tirando FG parallela alla base DE, questa sarà la divisoria richiesta.

In quanto al secondo caso, sia il capotagliato BDGE, il quale abbia BD di 28, EG di 63, l'altezza FC di 28 e tutta la quadratura 1274. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 480 con una divisoria parallela alla base EG. Acciò si esegua tutto questo, egli fa noto che il capotagliato diventi triangolo come AEG, e ne nasce il triangolo straniero ABD, del quale si conosce la sola base BD di 28. Si deve ora sapere la sua altezza CA e tutta la sua quadratura. Per eseguire tutto questo, noi faremo uso delle regole esposte e sapremo l'altezza CA di $22 \frac{4}{5}$ e la sua quadratura $313 \frac{3}{5}$. Eseguita questa preparazione, bisogna stoccare dal capotagliato la porzione 480. Uniremo dunque la porzione 480 e la quadratura straniera $313 \frac{3}{5}$ ed avremo la somma $793 \frac{3}{5}$ che si dovrà tagliare, contando dal vertice A. Per eseguirlo si faccia uso della solita regola. Come la quadratura $1587 \frac{3}{5}$ dell'intero triangolo AEG sta al quadrato $2540 \frac{4}{55}$ di tutta l'altezza FA, così la parte che si deve tagliare, $793 \frac{3}{5}$ composta dalla parte 480 e dallo apparecchio straniero $313 \frac{3}{5}$ al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova 1270 presso a poco che dinota il quadrato della lunghezza che si deve contare da A; per cui estratta la radice $35 \frac{43}{74}$ la medesima darà AH, e perchè lo straniero CA è di $22 \frac{4}{5}$, così il doppio $13 \frac{7}{10}$ si conterà da C sino ad H, e quindi la linea KHI sarà la divisoria parallela alla base EG.

In quanto al terzo caso, sia il capotagliato BCED Fig. 52. il quale abbia BC di 18, DE di 35, l'altezza CG di 33 e tutta la quadratura $874 \frac{1}{2}$. Si cerca, contando dal punto C, tagliarne una porzione 320 con una divisoria parallela

alla base DE. Per eseguir questo taglio fa uopo che il capotagliato diventi triangolo ADE, del quale il triangolo ABC sarà lo straniero, di cui si conosce la sola base BC di 18. Calcoleremo la sua altezza LA per saperne la sua quadratura. Facendo uso delle regole esposte ritroveremo l'altezza LA di $35\frac{3}{4}$ e la sua quadra'u a $318\frac{3}{4}$. Fatto questo, si dovrà stoccare dal capotagliato una porzione 320. Uniremo la porzione 320 con la straniera quadratura $318\frac{3}{4}$ ed avremo la somma $638\frac{3}{4}$, la quale si dovrà tagliare in una lunghezza contata dal vertice A. Per eseguirlo si dica così. Come la quadratura $1192\frac{5}{7}$ di tutto il triangolo ADE sta al quadrato $4672\frac{3}{4}$ in circa di tutta l'altezza FA, così la parte $638\frac{3}{4}$ composta dalla porzione 320 e dall'apparecchio straniero $318\frac{3}{4}$ al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova $2500\frac{1}{14}$ presso a poco che dinota il quadrato della lunghezza che si deve contare da A; per cui estratta la radice 50 in circa, la medesima darà la lunghezza che si deve prendere nella perpendicolare AF dal punto A, e poichè il lato straniero AL è di $35\frac{5}{4}$, così il dippiù $14\frac{5}{14}$ lo conteremo da C sino ad H, e la linea IK sarà la divisoria parallela alla base DE.

5. DATO UN PARALLELOGRAMMO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA TRASVERSALE. Due casi possono accadere, o che il parallelogrammo sia rettangolo o che sia obbliquantolo. Sia in primo luogo il parallelogrammo rettangolo ABDC, il quale abbia AB di 27, AC di 34 e la quadratura 915. Si cerca dal punto E tagliarne una porzione 400 con una divisoria trasversale. Per eseguirlo il taglio deve farsi in forma di capotagliato, operando così. Si misuri EC di 13, si divida 400 per $13\frac{1}{2}$ metà del lato divisore CD, e dal quoziente 29 $\frac{17}{29}$ si sottragga EC di 13 ed il residuo 16 $\frac{17}{29}$ darà DF, e la linea EF sarà la divisoria trasversale.

Sia in secondo luogo il parallelogrammo obbliquantolo ABDC che abbia AB di 34, alla quale sono uguali HG, CD e l'altezza BF di 33 e tutta la quadratura 1122. Si cerca dal punto G tagliarne una porzione 450 con una divisoria trasversale. La esecuzione di questo problema si può fare in due maniere. Primieramente dal punto G si tiri GH parallela a CD e sia GE di 9; per cui la quadratura del parallelogrammo DH sarà 306. Ora poichè dobbiamo tagliarne 450, così sottraendo 306 da 450, il residuo 144 lo taglieremo da HB, servendoci di GH per lato di appoggio e di HA per lato d'incidenza. Diviso dunque 144 per 17 metà

di GH, il quoziente $8 \frac{8}{17}$ darà l'alzata HK, e tirata la parallela KI, la linea GI sarà la divisoria trasversale.

L'altra maniera di fare lo stesso taglio è così. Si faccia EL uguale a DC con abbassare la perpendicolare HL. Ora la porzione 450 da tagliarsi si divida per 17 metà del lato divisore EL, e dal quoziente $26 \frac{8}{17}$ si sottragga GE di 9, ed il residuo $17 \frac{8}{17}$ sarà l'altezza IK, e tirata la parallela KI, la linea GI sarà la divisoria trasversale che si voleva.

6. DATO UN TRIANGOLO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA TRASVERSALE. Sia il triangolo EBD che
Fig. 55. abbia l'altezza EC di 35, BC di 16, CD di 45 e la quadratura intera $1067 \frac{1}{2}$. Si cerca dal punto A tagliarne la metà $533 \frac{3}{4}$. Per tagliare questa metà egli è di mestieri eseguire la preparazione seguente. Si tirino le linee de' quadranti AF, AH che si debbano calcolare amendue, e si misuri soltanto AD di 25, restando AE di 32, essendo tutto DE di 57. Per trovare AF si dica. Come tutto DE di 57 sta ad EC di 35, così la parte DA di 25 alla linea AF che si trova $15 \frac{1}{3}$. Per sapere FD si dica. Come tutto EC di 35 sta a CD di 45, così AF di $15 \frac{1}{3}$ ad FD che si trova $19 \frac{2}{3}$, e perchè CD è di 45, resterà FC di $25 \frac{2}{3}$. Ora essendo CF uguale e parallela a GA, sarà anche questa $25 \frac{1}{3}$, ed essendo FA uguale e parallela a CG, sarà anche questa $15 \frac{1}{3}$; per cui il resto GE sarà $19 \frac{2}{3}$. Inoltre per sapere GH si dica. Come tutto EC di 35 sta a tutto CB di 16, così la parte EG di $19 \frac{2}{3}$ alla parte GH che si trova $15 \frac{1}{3}$. Quindi avremo del triangolo AEH la base AH di 35, l'altezza EG di $19 \frac{2}{3}$, e sarà la quadratura $337 \frac{1}{2}$ in circa, moltiplicando la base per la metà dell'altezza.

Eseguita questa necessaria preparazione, poichè dal punto divisorio A dobbiamo tagliare la metà $533 \frac{3}{4}$ di tutto il triangolo BDE, e poichè la divisoria trasversale cade nel lato della incidenza HB, così noi da questa metà ne toglieremo prima la quadratura $337 \frac{1}{2}$ del triangolo AEH, ed il residuo poi $196 \frac{17}{8}$ lo taglieremo dall'altro pezzo, servendoci di AH per lato di appoggio. Divisa perciò la quantità $196 \frac{17}{8}$ per $17 \frac{1}{2}$ metà di AH, il quoziente $11 \frac{115}{67}$ darà l'alzata interna HI, la parallela IK e la linea AK sarà la divisoria trasversale.

7. DATO UN TRAPEZIO NOTO, TAGLIARNE UNA PORZIONE CON UNA DIVISORIA TRASVERSALE. Sia il trapezio noto BCDEGH, la cui intera quadratura sia $2139 \frac{1}{2}$. Si cerca dal punto A dividerlo in due porzioni uguali con una divisoria
Fig. 56. trasversale. Poichè la divisoria per $1069 \frac{3}{4}$ metà del

73

trapezio dato dal punto A eale nel lato opposto CB, così noi ci serviremo di AD per lato di appoggio. Intanto la quadratura $253 \frac{1}{2}$ del triangolo DAE si sottragga dalla metà $1069 \frac{3}{4}$ da tagliarsi, ed il residuo $811 \frac{1}{4}$ sarà quello che taglieremo, servendoci di AD per lato di appoggio e di BC per quello d'incidenza. E perchè questi due lati convergono al di fuori del trapezio, così gli uniremo in I e ci serviremo della pratica dell'apparecchio straniero multilatero che si deve calcolare. Supponiamo già fatto questo calcolo, da cui conosceremo la lunghezza straniera DI di $20 \frac{4}{13}$ e la quadratura straniera $331 \frac{1}{5}$ in circa. Unendo dunque la porzione residua da tagliarsi $811 \frac{1}{4}$ con l'apparecchio straniero $331 \frac{1}{5}$, avremo la somma $1102 \frac{1}{6}$, circa, la quale divisa per $33 \frac{17}{16}$ metà dell'intero AI, il quoziente $35 \frac{76}{175}$ darà l'alzata DK, la parallela KL, e la linea AL sarà la divisoria trasversale che divide in due parti uguali il trapezio dato.

8. DIVIDERE QUALSIVOGLIA FIGURA DA PUNTI DIVERSI. Sia Fig. 57. una figura BCDEG da dividersi da più punti diversi, incominciando dal punto A. Si faccia la solita preparazione e riduzione per averne la intiera quadratura che si troverà 2050, della quale A sia 200, B di 480, C di 280, D di 600 ed E di 490, e che la linea AF sia il primo lato di appoggio.

Per dare ad A la parte 200, poichè ne abbiamo 130 nel triangolo AFG, così il di più 70 lo prenderemo nell'altra parte, servendoci di AF per lato di appoggio e di FE per lato d'incidenza. Diviso dunque 70 per 13 metà di AF, il quoziente $5 \frac{5}{13}$ darà l'alzata FR, e tirata la parallela RS, la linea AS sarà la divisoria per A compresa da ASG.

Per dare a B la porzione 480 dal punto divisorio S si faccia così. Dal punto S si tiri la linea de' quadranti SP, ed avremo il triangolo SEP, il quale calcolato secondo le regole esposte si trova di quadratura $88 \frac{1}{6}$ e la sua base SP di $30 \frac{2}{3}$ circa. Quindi dalla quantità 480 sottratto $88 \frac{1}{6}$ il di più $391 \frac{5}{6}$ lo prenderemo dall'altra parte, servendoci di SP per lato di appoggio. Essendo questo il lato di appoggio, quello d'incidenza essendo DI, perciò in questo caso ci dovremo servire dell'apparecchio straniero angolare DNP. Supponiamo calcolato questo straniero e sapremo che la base NP sia $17 \frac{1}{6}$ circa, l'altezza DO di $13 \frac{1}{6}$ e tutta la sua quadratura 116. Unendo questo straniero alla porzione residua da tagliare, avremo la somma $507 \frac{5}{6}$, la quale divisa per 24 metà di tutto SN, il quoziente $21 \frac{1}{6}$

circa darà l'alzata OM, e tirata poi la parallela ML, la linea SL sarà la divisoria per B.

Per dare a C la parte 280 si faccia così. Poichè il punto divisorio lo vogliamo in L, così tireremo la linea de'quadranti KL che ci servirà per lato di appoggio. E poichè il lato d'incidenza è CB, così stendendo BC per CK, ne nasce lo straniero CKL che forma l'apparecchio straniero laterale che bisogna calcolare. Supponiamo eseguito questo calcolo, dal quale sapremo LK di 18, la sua altezza 6 e la quadratura 54. Unendo dunque questo apparecchio 54 con la porzione di C di 280, avremo la somma 334, la quale divisa per 9 metà di LK, il quoziente 37 circa darà l'alzata KY, e tirata la parallela YX, la linea LX sarà la divisoria per C.

Per dare a D la parte 600 servendoci di I per punto divisorio, si faccia così. Si trovi prima la lunghezza IH che calcolata sarà $7\frac{1}{2}$; per cui il resto in Z sarà $27\frac{4}{5}$: ed essendo l'altezza ZX di 19 presso a poco, sarà la quadratura del triangolo IZX di 264. In oltre perchè XZ poco differisce da BM, possiamo prenderle per eguali e parallele, ed essendo ZM di 2, sarà la quadratura del parallelogrammo BZ di 38. Finalmente essendo la quadratura del triangolo BMA di 76, avremo per l'intero pezzo IABX la quantità 378, e perchè D ne deve avere 600, così sottraendo 378 dal medesimo, il residuo 222 lo prenderemo dall'altra parte servendoci di IA per lato di appoggio e di AS per quello d'incidenza. Diviso dunque 222 per 19 circa metà di IA, il quoziente $11\frac{13}{19}$ darà l'alzata AV, e tirata la parallela VT, la linea IT sarà la divisoria per D. Finalmente il residuo ILST di 490 sarà la porzione di E come è manifesto.

9. DATO UN CERCHIO NOTO, DIVIDERLO A RAGGI. Sia il cerchio BGHI noto, di cui il raggio AB sia di 30, il diametro BH sarà di 60, la circonferenza $188\frac{4}{7}$, la sua quarta parte $47\frac{1}{7}$ e tutta la quadratura del suo piano circolare $2828\frac{4}{7}$ la cui quarta parte GAB dovrà essere $707\frac{1}{7}$. Ora tutta la intera quadratura dovrà dividersi in cinque porzioni, delle quali sia A di 570, B di 688, C di 570, D di 500 ed E di $500\frac{4}{7}$, stabilendo il punto divisorio nel centro A il lato di appoggio, il raggio AB e quello della incidenza l'arco della circonferenza. Per eseguire siffatta divisione a raggi si prepari il cerchio, facendo così. Si tirino i due diametri BH, GI che s'intersechino ad angoli retti nel centro A; per cui tutto il cerchio verrà diviso in quattro quadranti o porzioni uguali, contenendo in questo caso cia-

75

chedun quadrante $707 \frac{1}{2}$ di quadratura e $47 \frac{1}{2}$ di lunghezza di arco.

Per dare ad A la sua parte 570 poichè questa può prendersi tutta nel primo quadrante GAB, così noi divideremo la quadratura 570 per 15 metà del lato di appoggio AB, il quoziente 38 darà l'alzata BG, numerandosi dal punto B sull'arco del quadrante, la quale arriva fino al punto C dell'incontro. Quindi tirando AC, questo raggio sarà la prima divisoria per la porzione di A.

Si osservi che riuscendo qualche volta difficile il numerare sull'arco del quadrante la quantità dell'alzata, noi possiamo usare un altro artificio molto più sieno. Si calcoli il numero 33 dell'alzata a quanti gradi e minuti dell'arco del quadrante corrisponda, facendo così. La intera circonferenza $188 \frac{4}{5}$ sta a 38 arco dato come 360 gradi al quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trovano 72 gradi e 32 primi presso a poco. Quindi misurando sul quadrante BG i gradi e minuti calcolati, facendo uso del semicerchio fisseremo lo stesso punto C della incidenza.

Per dare a B la sua parte 688 perchè dal primo quadrante GAB di $707 \frac{1}{2}$ si è presa la parte di A di 570, così resta del medesimo il residuo GAC di $137 \frac{1}{2}$; e perchè B ne deve avere 688, così noi daremo a B questo residuo del primo quadrante, ed il dippiù $550 \frac{6}{105}$ lo taglieremo dal secondo quadrante GAH, servendoci per lato di appoggio del raggio AG. Quindi dividendo $550 \frac{6}{105}$ per 15 metà del lato di appoggio, il quoziente $36 \frac{76}{105}$ sarà l'alzata GD, e che ridotta a gradi e minuti secondo la pratica antecedente, avremo 70 gradi e 6 primi presso a poco; per cui tirando AD, avremo il pezzo CAD per la parte di B.

Per dare a C la sua parte 570 poichè dal secondo quadrante ne abbiamo tagliata la quantità GAD di $550 \frac{6}{105}$, ci resta il residuo DAH di $156 \frac{1}{2}$, il quale dandolo a C, il resto $413 \frac{5}{7}$ che gli spetta, lo taglieremo dal terzo quadrante HAI, servendoci del raggio AH per lato di appoggio. Quindi dividendo $413 \frac{5}{7}$ per 15 metà del lato di appoggio, il quoziente $27 \frac{61}{105}$ darà l'alzata HE la quale ridotta a gradi e minuti, avremo 52 gradi e 39 minuti presso a poco; per cui tirando AE, questa sarà la divisoria per la parte di C compresa nel pezzo DAE.

Per dare a D la sua parte 500, poichè dal terzo quadrante ne abbiamo presa la quantità $413 \frac{5}{7}$ compresa da HAE, il resto del medesimo quadrante EAI, sarà $206 \frac{1}{2}$ che noi daremo a D, al quale bisognano altri $206 \frac{4}{5}$ per compire 500 e che noi taglieremo dall'ultimo quadrante

IAB, servendoci di AI per lato di appoggio. Dunque dividendo $206 \frac{4}{7}$ per 15 metà del lato di appoggio, il quoziente $13 \frac{81}{105}$ darà l'alzata IR, la quale ridotta a gradi e minuti avremo 26 gradi e 17 primi presso a poco; per cui tirando AF, questa sarà la divisoria per la parte di D che viene compresa del pezzo EAF. Il resto EAB di $500 \frac{4}{7}$ dell'ultimo quadrante sarà la porzione di E come è manifesto;

10. DATO UN CERCHIO NOTO, DIVIDERLO A TAGLI PARALLELI. Fig. 59. SIA il cerchio ACBD noto, il cui raggio sia 30 e la intera quadratura $2828 \frac{4}{7}$. Questa dovrà dividersi in cinque porzioni, delle quali abbia A la quantità 570, B sia di 638, C di 570, D di 500 ed E di $500 \frac{4}{7}$, in modo però che le divisioni sieno parallele tra loro. Per eseguire si fatta pratica bisogna prima preparare tutto il campo del cerchio, facendo così. Si tirino i due diametri AB, CD che s'intersechino tra loro ai angoli retti nel centro S: pereni tutto il piano circolare sarà diviso in due semicerchi uguali CAD, CBD, de' quali ciascheduno contiene di quadratura $1414 \frac{2}{7}$ e che avranno ciascheduno nel loro vertice l'estremo A e B dell'altro diametro AB; donde nasce che ogni semicerchio può considerarsi come un triangolo unito all'altro con la base comune rappresentata dal diametro CD, e che i medesimi triangoli abbiano i loro vertici in A ed in B. Indi si noti che il raggio AS ovvero BS essendo 30, il suo quadrato sarà 900. Fatto questo, l'operazione si principia dal vertice A come punto divisorio, e nel punto S poi va a terminare, contando l'alzata nel raggio AS, di poi si principia dall'altro vertice B e contando parimente in BS, termina similmente in S, facendo la divisione a ritorno come qui vedremo.

Per dare ad A la parte 570 poichè nel primo semicerchio CAD considerato come un triangolo, abbiamo $1414 \frac{2}{7}$ di quadratura e per altezza AS di 30, il cui quadrato è 900, così per tagliare questa porzione, contando dal vertice A e che la divisoria resti parallela alla base CD, dobbiamo conoscere a qual punto di AS cada la divisoria, dicendo così: siccome l'intera quadratura $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CAD sta al quadrato 900 del suo raggio AS, così la porzione 570 che si vuol tagliare, al quadrato della sua altezza che è il quarto proporzionale. Fatto il calcolo, si trova il quarto proporzionale $362 \frac{7}{99}$, il quale rappresenta il quadrato dell'altezza che si deve contare da A e dal quale estratta la radice 19 presso a poco, la medesima darà AF; per cui tirando EFG parallela alla base CD

avremo la prima divisoria per la parte di A di 570 contenuta nel pezzo EAG.

Per dare a B la sua parte 688 noi uniremo la parte di A e di B ed avremo la somma 1258, la quale potendo entrare nel primo semicerchio, perciò faremo uso della stessa pratica antecedente, dicendo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CAD sta al quadrato 900 del suo raggio AS come la quadratura 1258 di A e di B al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova 800 $\frac{54}{99}$ ch'è il quadrato dell'altezza, da cui estratta la radice 28 presso a poco, la medesima si conterà da A ed arriva in I. Quindi dal punto I si tiri HIK parallela alla base CD, e questa sarà l'altra divisoria per la parte di B contenuta nel pezzo HKGE.

Per dare a C la sua porzione 570 si osservi che da tutto il semicerchio CAD di $1414 \frac{2}{7}$ avendone levata la parte di A di 570 e quella di B di 688, ci resta il solo residuo 156 $\frac{2}{7}$ il quale non basta per la parte di C; quindi è che il resto che gli spetta 413 $\frac{5}{7}$, dovrà prendersi nell'altro semicerchio e che deve restare unito col primo residuo per fare un pezzo intero 570. Affinchè tutto questo possa ceguirsi, noi principieremo a tagliare nel secondo semicerchio CBD e dal vertice B contando sul raggio BS l'ultima parte di E di 500 $\frac{4}{7}$, di quella di D di 500 affinchè quello che ci resta di questo secondo semicerchio, essendo unito col residuo del primo possa formare la parte di C.

Per dare adunque ad E la sua parte 500 $\frac{4}{7}$ noi useremo lo stesso artificio dei tagli antecedenti, dicendo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CBD sta al quadrato 900 del suo raggio BS come la parte 500 $\frac{4}{7}$ di E al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova 318 $\frac{379}{693}$ quadrato dell'altezza; perciò estraendone la radice 17 presso a poco, la medesima si conterà da B ed arriva in P. Quindi da questo punto P si tiri OPQ parallela alla base CD, e questa sarà la divisoria per la parte di E contenuta in OBQ.

Per dare a D la sua parte 500 noi uniremo la parte di E e di D, ed avremo la somma 1000 $\frac{4}{7}$ e diremo così. La quadratura intera $1414 \frac{2}{7}$ del semicerchio CBD sta al quadrato 900 del suo raggio BS come la somma 1000 $\frac{4}{7}$ di E e di D al quadrato della sua altezza. Fatto il calcolo, si trova 636 $\frac{664}{693}$ che rappresenta il quadrato dell'altezza, da cui estratta la radice 25 presso a poco, questa si conterà da B ed arriva in M, dal quale punto si tiri

LMN parallela alla base CD, e questa sarà l'altra divisoria per la parte di D compresa nel pezzo OLNQ.

Finalmente avendo tolta la quantità $1000 \frac{4}{7}$ da questo secondo semicerchio ed essendo il medesimo $1414 \frac{2}{7}$ così sottraendo il primo numero dal secondo, ci resta l'avanzo $413 \frac{5}{7}$ il quale unendosi con l'avanzo $156 \frac{2}{7}$ del primo semicerchio, avremo la quantità 570 che resta nel mezzo del campo circolare, e la daremo a C che era la sua parte.

11. DATO UN CERCHIO NOTO, DIVIDERLO A TAGLI CONCENTRICI.
Fig. 60. ci. Sia il cerchio BF noto, il cui raggio sia 30 e la intera quadratura $2828 \frac{4}{7}$ questa dovrà dividersi in quattro porzioni, delle quali sia A di 680, B di 690, C di 710 e D di $748 \frac{4}{7}$ in modo però che le divisorie debbano essere tutte a cerchi concentrici. Per eseguire siffatto problema si tiri il raggio AB sul quale si debbano numerare le lunghezze da A verso B.

Per dare ad A la sua parte 680 poichè questa prima parte deve situarsi nel mezzo e rappresentare un piano circolare, perciò dobbiamo ritrovare la lunghezza proporzionata del raggio che le conviene, facendo uso della seguente regola, dicendo così. La intera quadratura $2828 \frac{4}{7}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB che è lungo 30, come la parte 680 di A al quadrato del suo raggio corrispondente. Fatto il calcolo, si trova $216 \frac{72}{198}$ che dinota il quadrato del raggio che spetta alla porzione 680, e dal quale estratta la radice $14 \frac{1}{2}$ presso a poco, la medesima indica la lunghezza del raggio richiesto da A sino ad E. Quindi fatto centro in A ed intervallo in E, si descriva la prima circonferenza che sarà la divisoria per la parte di A.

Per dare a B la sua parte 690 si unisca la parte di A e di B in una somma, ed avremo la quantità 1370. Indi si dica: la quadratura intera $2828 \frac{4}{7}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB come la somma 1370 di ambe le porzioni al quadrato del raggio corrispondente. Fatto il calcolo, si avrà $435 \frac{180}{198}$ che indica il quadrato del raggio che si cerca, e dal quale estratta la radice 20 presso a poco, questa darà la lunghezza AD; per cui fatto centro in A ed intervallo D, si tiri l'altra circonferenza che sarà la seconda divisoria, e lo spazio anulare compreso tra la prima e la seconda circonferenza sarà la porzione di B.

Per dare a C la sua parte 710 si unisca la parte di A, di B e di C in una somma, ed avremo la quantità 2080. Indi si dica. La quadratura intera $2828 \frac{4}{7}$ del cerchio BF sta al quadrato 900 del suo raggio AB come la somma

2080 delle tre porzioni al quadrato del raggio corrisponde. Fatto il calcolo, si avrà $66\frac{1}{10}$ indicante il quadrato del raggio che si cerca; perciò estraendo la radice 25 presso a poco, questa darà la lunghezza del raggio ricercato, misurandolo da A sino a C. Quindi fatto centro in A ed intervallo C, si tiri l'ultima divisoria la quale contiene la porzione di C.

Finalmente dall'intera quadratura $2828\frac{4}{7}$ avendone tolta la somma 2080 che esprime la porzione di A, di B e di C, ci resta l'avanzo $748\frac{4}{7}$ e che noi daremo a D che è l'ultima porzione che dovea stabilirsi.

§. III.

LA INTERSECAZIONE.

Dopo di aver percorse tutte le regole della interdivisione ordinaria e straordinaria stimiamo nostro indispensabile dovere come un compimento di tutto l'artificio divisorio, di esporre le maravigliose regole della INTERSECAZIONE la quale costituisce la parte la più sublime della divisione istessa. Siffatte regole sono le seguenti.

1° DATI DUE TRIANGOLI OPPOSTI AL VERTICE CON LE LORO BASI PARALLELE E NOTE, E DATA DIPIÙ L'ALTEZZA PERPENDICOLARE TRA LE STESSE, RITROVARE L'ALTEZZA DI CIASCEDUN TRIANGOLO E LA LORO QUADRATURA. Nella risoluzione di questo problema due casi possono accadere o che l'altezza perpendicolare passi per i loro vertici opposti e resti tutta dentro de' triangoli, o che la medesima perpendicolare stia fuori de' triangoli quando sieno obbliqui.

ig. 61. Sia il primo caso dei due triangoli BAC, DAE opposti nel vertice A e che le basi BC, DE sieno parallele e che l'altezza perpendicolare FG passi per i vertici in A. Sieno le basi BC di 27, DE di 58 e la comune altezza GF di 54. Si cerca l'altezza particolare AF del triangolo BAC e la sua quadratura, e si cerca l'altezza perpendicolare AG del triangolo DAE e la sua quadratura. Per sapere l'altezza AF si dica così. La somma 85 delle due basi prese insieme sta a tutta l'altezza 54 come la sola base BC di 27 alla sua altezza FA che si trova $17\frac{13}{45}$. Quindi l'altezza AG dell'altro triangolo DAE sarà $36\frac{7}{45}$. Ritrovate le particolari altezze dei due triangoli, sarà fa-

cile di trovarne le loro rispettive quadrature, moltiplicando di ciascheduno la base per la metà della propria altezza, ed avremo perciò la quadratura $1231 \frac{48}{85}$ pe' il triangolo BAC e la quadratura $1063 \frac{48}{85}$ pe' il triangolo DAE.

Fig. 62.

Sia il secondo caso de' due triangoli BAC, DAE opposti nel vertice A e che le basi BC, DE sieno parallele e che l'altezza perpendicolare CG sia fuori de' triangoli. Sieno le basi BC di 27, DE di 37 e la comune altezza CG sia di 54. Si cerca l'altezza particolare CF del triangolo BAC e la sua quadratura, e si cerca l'altezza particolare FG del triangolo DAE e la sua quadratura. Per sapere l'altezza CF si dica così. La somma 64 delle due basi prese insieme sta a tutta l'altezza GC di 54 come la sola base BC di 27 alla sua altezza CF che si trova $22 \frac{35}{11}$. Quindi l'altezza GF dell'altro triangolo DAE sarà $31 \frac{7}{11}$. Ritrovate così le particolari altezze dei due triangoli, sarà facile ritrovare le loro rispettive quadrature, moltiplicando di ciascheduno la base per la metà della propria altezza, ed avremo perciò la quadratura $307 \frac{35}{64}$ pe' il triangolo BAC e la quadratura $546 \frac{31}{64}$ pe' il triangolo DAE.

Avvertasi in questo problema che se di due triangoli opposti al vertice che abbiano le due basi parallele, noi ne conosciamo le rispettive altezze e la base di uno di questi triangoli, potremo sapere la base dell'altro, dicendo così. L'altezza di un triangolo sta alla propria base come l'altezza dell'altro triangolo alla sua base che si cerca. Finalmente la pratica esecuzione di questo importantissimo problema si dica INTERSECAZIONE, essendo questa la base delle regole seguenti.

2. DATO UN TRIANGOLO RETTANGOLO NOTO DEL QUALE UN CATETO SIA LATO DI APPOGGIO, UNIRE AL MEDESIMO UN ALTRO TRIANGOLO E SERVIRCI DELLO STESSO LATO DI APPOGGIO. Sia il triangolo ABC rettangolo in B, di cui il cateto AB sia 40, il cateto BC di 20 e la sua quadratura 400. Si cerca di aggiungere al medesimo un altro triangolo che abbia 200 di quadratura, con servirci di AB per lato di appoggio. Per farlo si unisca la quadratura 400 del triangolo dato ABC con la quadratura 200 dell'altro triangolo che si vuole aggiungere, e la somma 600 si divida per 20 metà di AB, e dal quoziente 30 tolto via BC di 20, il residuo 10 si numera nella prolungazione CD, e tirata AD, il triangolo ACD sarà quello di 200 che si cercava unire al primo, servendoci dello stesso lato AB d'appoggio. La pratica di questo problema si dice REGOLA DE' CATETI giac-

chè ci serviamo del medesimo cateto come lato di appoggio per aggiungere altra quantità ad un'altra data quantità.

ig. 64. 3. DIVIDERE UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI DA UN PUNTO PRESO IN UN ANGOLO E CHE ACCADENDO LA INTERSECAZIONE, CI SERVIAMO DELLA REGOLA DE' CATETI. Sia il trapezio ad angoli rientranti ADIII da dividersi in tre porzioni dal punto divisorio A preso in un angolo. Si faccia la sua preparazione con tirare la linea AB di 60 mediante, la quale il trapezio verrà diviso in due parti. Nella medesima si esegua la necessaria riduzione acciò si abbia di ciascheduna parte la propria quadratura, la quale al solito si noti dirimpetto per conoscere la intera quadratura 2088 $\frac{1}{2}$ di tutto il trapezio, la quale vada divisa in tre porzioni, delle quali A sia di 500, B di 1180 e C di 408 $\frac{1}{2}$, e sia la linea de' quadranti AB il lato di appoggio.

Per dare ad A la porzione 500 si avverta che dovendoci servire di AB di 60 per lato di appoggio, così noi faremo il taglio alla rovescia. E poichè il pezzo AICHB contiene 925, così sottrarremo la parte 500 da questo pezzo ed il residuo 425 sarà quello che taglieremo alla rovescia affinchè resti in due pezzi la quantità per A di 500. Si divide dunque 425 per 30 metà di AB, ed il quoziente 14 $\frac{1}{3}$ darà l'alzata esterna BX, la parallela XY, e la linea AY sarebbe la divisoria la quale lascia verso il lato AB la quantità 425 e stabilisce la porzione di A di 500 nei due pezzi YHT, VIA. Ora egli è da osservarsi che questa divisoria non cade tutta dentro dello spazio della figura, ma esce fuori per la lunghezza VT e forma il triangolo VCT che è tutto straniero, la cui quadratura manca per conseguenza alla quantità tagliata. Quindi è che questo triangolo straniero bisogna calcolarlo affinchè la sua quantità si aggiunga al taglio fatto e si torni ad operare.

Per calcolare questo triangolo straniero si faccia così. La linea NC si distenda in S, ed avremo due triangoli stranieri CSV, CST, dei quali ognuno ha il suo triangolo compagno con le basi parallele e sono CSV, VIK, gli altri due sono CST, THB de' quali bisogna calcolare le perpendicolari de' triangoli stranieri CSV, SCT per averne le quadrature; dippiù è necessario sapere la loro base comune CS, e finalmente calcoleremo le basi BH, KI de' triangoli compagni rispettivi, e ci ritroveremo perciò ad eseguire la indispensabile regola della intersecazione la quale ci dà il modo come calcolare le seguenti lunghezze.

Per ritrovare la base CS si faccia così. Dal punto Y si tiri YR uguale e parallela con XB di $14 \frac{1}{8}$, e poi si calcoli RB, dicendo così. Tutto HQ di 28 sta a tutto QB di 4 come YR di $14 \frac{1}{8}$ alla porzione RB che si trova 2 in circa. Ora essendo AB di 60, sarà AR di 58. Fatta questa prima operazione, per trovare CS si dica. Tutto AR di 58 sta ad RY di $14 \frac{1}{8}$ come la parte AN di 35 alla porzione NS che si trova $8 \frac{1}{3}$ circa, da cui tolto NC di 5, resta la linea straniera CS di $3 \frac{1}{4}$ che dinota la base comune de' triangoli stranieri.

Per ritrovare la base BH si faccia così. Tutto AR di 58 sta ad RY di $14 \frac{1}{8}$ come AQ di 56 a QB che si trova 13 presso a poco; e poichè tutto QH è di 28, così resta la base BH di 15. Ora in questi due triangoli della prima intersecazione CST, THB abbiamo la base CS di $3 \frac{1}{4}$ e la base BH di 15 e la loro altezza comune essendo QN di 21 come la sola base CS di $3 \frac{1}{4}$ alla propria altezza che si trova $3 \frac{3}{4}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $6 \frac{1}{4}$ sarà la quadratura del primo triangolo straniero CST della intersecazione.

Inoltre per ritrovare la base KI del triangolo VKI compagno del triangolo CSV per la seconda intersecazione si dica così. Tutto AR di 58 sta a tutto RY di $14 \frac{1}{8}$ come AL di 8 ad LK che si trova 2 circa; e poichè LI è di 26, così resta la base KI di 24. Ora in questi due triangoli CSV, VKI di questa seconda intersecazione abbiamo la base CS di $3 \frac{1}{4}$ e la base KI di 24 e la loro comune altezza NL di 27, dobbiamo trovare l'altezza particolare del solo triangolo CSV, dicendo così. La somma $27 \frac{1}{3}$ delle due basi parallele CS, KI sta alla loro comune altezza NL di 27 come la sola base CS di $3 \frac{1}{4}$ alla propria altezza che si trova $3 \frac{1}{4}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $5 \frac{5}{12}$ sarà la quadratura del secondo triangolo CSV della intersecazione. Poichè dunque abbiamo la quadratura $6 \frac{1}{4}$ del primo triangolo straniero e la quadratura $5 \frac{5}{12}$ del secondo, così la loro somma $11 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura di tutto il triangolo straniero TCV. Questa quantità per appunto è quella che manca a 425 che noi abbiamo tagliato, servendoci di AB per lato di appoggio; per cui al medesimo numero di 425 dobbiamo unirvi il mancante $11 \frac{1}{3}$ ed operare di nuovo, servendoci dello stesso lato di appoggio AB come un cateto.

Unendo a 425 che si deve tagliare, lo straniero $11 \frac{1}{3}$ risultato del calcolo della intersecazione e mancante alla quantità divisa, avremo la somma $436 \frac{1}{3}$. Questa somma

si divida per 30 metà dello stesso lato di appoggio AB, e il quoziente $14 \frac{5}{6}$ darà la lunghezza BZ, e perchè BX è di $14 \frac{1}{6}$, così allungando da X il dappiù $\frac{7}{6}$ avremo XZ pe' l' dappiù dell'alzata, e tirata la parallela ZD, la linea AD sarà la divisoria richiesta. Ora questa seconda divisoria sebbene abbia dato alla quantità 425 il suo mancante, pure taglia un altro poco dello straniero; per cui si dovrebbe eziandio calcolare, ma perchè lo allungamento XZ è di una picciola frazione, così il secondo straniero che risulta tra il primo triangolo straniero e la seconda divisoria, essendo picciolissimo, perciò si può trascurare, altrimenti si tornerebbe ad operare ed istituire di nuovo la regola della intersecazione. Quindi possiamo conchiudere che la divisoria seconda AD sia senza errore sensibile prossimamente la vera, la quale separa la parte di A di 50 nei due pezzi segnati, lasciando appoggiato sopra AB il residuo del primo pezzo 425 prossimamente.

Per dare a B la porzione 1180 poichè ne abbiamo nel primo pezzo il residuo 425, perciò il dappiù 755 lo dobbiamo tagliare nell'altro pezzo. Ora poichè tagliando questa quantità e servendoci di AB per lato di appoggio, la divisoria non cade nel lato BG, ma nel lato GD; perciò sarà d'uopo servirci dell'apparecchio straniero angolare BGK che si deve calcolare. Supponiamo già fatto questo calcolo per cui sapremo che la base straniera BK sia $15 \frac{1}{4}$, e tutta la quadratura straniera di $85 \frac{1}{4}$. Dunque alla quantità 755 unita $85 \frac{1}{4}$, avremo la somma intera $840 \frac{1}{4}$ la quale divisa per $37 \frac{3}{4}$ metà di tutto AK, il quoziente $22 \frac{1}{4}$ presso a poco darà l'alzata CX, la parallela XZ, e la linea AZ sarebbe la divisoria per la parte di B di 1180 contenuta da ZAD, lasciando poi in due pezzi ZDS, GEA la parte ultima di C. Ma perchè questa divisoria AZ non cade tutta nello spazio della figura ed esce fuori per GS, perciò forma un triangolo straniero SFG, la cui quadratura manca alla porzione tagliata 755; per cui è mestiere calcolarlo acciò la sua quantità si unisce alla parte tagliata e si torni ad operare.

Per calcolare questo triangolo straniero si faccia così. La linea MF si distenda sino a Q, ed avremo due triangoli stranieri SQF, QFG de' quali ciascheduno ha il suo triangolo compagno con le basi parallele che sono SFQ, SDP, gli altri due sono QFG, GEO, de' quali bisogna calcolare le altezze de' triangoli stranieri SFQ, QFG per averne le quadrature: dappiù calcoleremo la loro base comune FQ, e finalmente calcoleremo le basi DP, EO dei

triangoli compagni rispettivi, e così faremo di nuovo il calcolo della intersecazione per le seguenti lunghezze.

Per ritrovare la base FQ si faccia così. Dal punto Z si tiri ZP parallela ed uguale ad XC, la quale taglia di tutto AB la parte PB che si deve sapere, dicendo così. Il lato DO di 35 sta al lato OK di $33\frac{1}{2}$, come il lato ZP di $22\frac{1}{2}$ al lato PK che si trova $21\frac{1}{3}$ circa. E perchè BK è di $15\frac{1}{2}$, così resta BP di $5\frac{5}{6}$. Ora da tutto AB di 60 tolto via PB di $5\frac{5}{6}$, resta AP di $54\frac{1}{6}$. Fatto questo, conosceremo FQ, dicendo così. Tutto AP di $54\frac{1}{6}$ sta a tutto PZ di $22\frac{1}{2}$, come la parte AM di 25 ad MQ che si trova $9\frac{1}{2}$ circa, e perchè MF è di 6, resterà FQ di $3\frac{1}{2}$ che era la base comune de' due triangoli stranieri.

Per trovare la base DP si dica. Il lato AP di $54\frac{1}{6}$ sta al lato PZ di $22\frac{1}{2}$, come AO di 42 ad OP che si trova $17\frac{1}{2}$. Saputa la base DP e la base QF ed essendo la loro comune altezza OM di 17, sarà facile di ritrovare l'altezza propria del primo triangolo straniero SFQ, dicendo così. La somma $21\frac{1}{2}$ delle due basi parallele DP, QF sta alla loro comune altezza OM di 17 come la sola base QF di $3\frac{1}{2}$ alla sua propria altezza che si trova $2\frac{3}{4}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $4\frac{1}{2}$ sarà la quadratura del triangolo SFQ della prima intersecazione.

Per ritrovare la base O si dica così. Tutto AP di $54\frac{1}{6}$ sta a tutto PZ di $22\frac{1}{2}$, come AL di 8 ad LO che si trova $3\frac{1}{4}$ presso a poco, e perchè tutto LE è di 21, così resta la sola base OE di $17\frac{1}{4}$. Calcolata adunque la base EO e la base QF ed essendo la loro comune altezza LM di 17, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero QFG, dicendo così. La somma $21\frac{1}{4}$ delle due basi parallele QF, EO sta alla loro comune altezza LM di 17 come la sola base QF di $3\frac{1}{2}$ alla propria altezza che si trova $2\frac{3}{4}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $3\frac{1}{6}$ sarà la quadratura del triangolo QFG della seconda intersecazione. Ora unendo le quadrature di ambedue questi triangoli stranieri, la somma $9\frac{5}{6}$ sarà la quadratura di tutto lo straniero SFG. Questa quantità straniera per appunto è quella che manca alla quantità 755 che abbiamo tagliata; perciò dobbiamo unire al numero 755 lo straniero $9\frac{5}{6}$ e fare di nuovo la divisione.

Aggiungendo dunque a 775 che si deve tagliare lo straniero calcolato $9\frac{5}{6}$ mancante alla quantità divisa, avremo la somma $764\frac{5}{6}$, su di cui si deve eseguire di nuovo l'operazione, servendoci del medesimo lato di appoggio AB

come un cateto. E perchè ci bisogna eziandio l'apparecchio straniero angolare GKB di $85\frac{1}{4}$, così alla somma nuoveremo ancora quest'altra quantità ed avremo in tutto $840\frac{7}{8}$, la quale divisa per $37\frac{3}{4}$ metà di tutto AK, il quoziente di $22\frac{1}{4}$ circa darà l'alzata CD; e perchè CX è di $22\frac{1}{4}$, così allungando da X il dippiù $\frac{1}{4}$ fino a D, e tirata poi la parallela DF, la linea AF sarà la divisoria, la quale senza error sensibile può prendersi per esatta; sebbene ci resta un sottilissimo straniero. Finalmente i due pezzi FDS, GEA che uniti insieme fanno $408\frac{1}{2}$, sarà la parte ultima di C.

4. DATO UN TRIANGOLO RETTANGOLO NOTO DEL QUALE UN CATETO SIA LATO DI APPOGGIO, UNIRE AL MEDESIMO UN ALTRO TRIANGOLO RETTANGOLO E FARE IN MODO CHE LA IPOTENUSA DEL PRIMO SIA LATO DI APPOGGIO DEL SECONDO. Sia il triangolo ABC rettangolo in B, del quale il cateto AB sia di 20, il cateto BC di 8 e la sua quadratura 80. Si cerca di aggiungere al medesimo un altro triangolo che abbia 30 di quadratura con servirci della ipotenusa AC del primo triangolo per lato di appoggio. Per eseguire tutto questo è necessario prima di calcolare la lunghezza della ipotenusa AC. Quindi essendo il cateto AB di 20, il suo quadrato sarà 400, ed essendo il cateto BC di 8, il suo quadrato sarà 64. Si sommino insieme questi due quadrati, ed il risultato 464 sarà il quadrato della ipotenusa AC, dal quale estratta la radice $21\frac{1}{2}$ circa, questa sarà la sua vera lunghezza. Ora poichè dobbiamo aggiungere 30, così diviso questo numero per $10\frac{3}{4}$ metà di AC, il quoziente $2\frac{3}{4}$ circa darà la perpendicolare, o sia l'alzata CD; per cui tirata AD, il triangolo ACD di 30 sarà quello che si voleva aggiungere al primo con servirci della ipotenusa AC per lato di appoggio. La pratica di questo problema noi la diremo sempre in appresso REGOLA DELLA IPOTENUSA, perchè ci serviamo della medesima per lato di appoggio quando si deve unire ad un triangolo dato un'altra data quantità.

5. DIVIDERE UN TRAPEZIO AD ANGOLI RIENTRANTI DA UN PUNTO PRESO IN UN ANGOLO E CHE ACCADENDO LA INTERCAZIONE, CI SERVIAMO DELLA REGOLA DELLA IPOTENUSA. Sia il trapezio ad angoli rientranti ABDE da dividersi in due porzioni dal punto A preso in un angolo, e sia AE di 61 il lato di appoggio. Si faccia al solito la necessaria riduzione acciò si abbia la sua intera quadratura 1202 da dividersi in due parti, delle quali A sia 720 e B di 482, servendoci di AK per lato di appoggio.

Fig. 65.

Fig. 66.

Per dare ad A la sua parte 720 la medesima si divide per 30 $\frac{1}{2}$, metà di AE, ed il quoziente 23 $\frac{37}{6}$, o sia 23 $\frac{1}{2}$, circa darà l'alzata EF, la parallela FQ e la linea AQ sarebbe la divisoria per la parte di A. Poichè questa divisoria non cade tutta nello spazio della figura ma esce al di fuori per LM, perciò si ottiene il triangolo straniero LCM che bisogna calcolare acciò la sua quadratura come mancante alla quantità tagliata, si possa aggiungere alla medesima e rifare l'operazione. Per calcolare dunque lo straniero la retta IC si continui sino a K, ed avremo la retta straniera CK che si deve calcolare, facendo la base comune de' due triangoli stranieri LKC, MKC e si operi nel modo seguente. Dal punto Q si abbassi la perpendicolare QP uguale e parallela ad FE di 23 $\frac{1}{2}$, la quale stacca di tutto AE la porzione PE che si deve calcolare così. Tutto DH di 43 sta a tutto HE di 19 come QP di 23 $\frac{1}{2}$, alla parte PE che si trova 10 $\frac{3}{4}$ circa; e poichè AE è di 61, così resta PA di 50 $\frac{5}{8}$. Per trovare ora la base straniera CK si dica. Tutto AP di 50 $\frac{5}{8}$ sta a tutto PQ di 23 $\frac{1}{2}$ come AI di 29 a IK che si trova 13 $\frac{1}{2}$ presso a poco, e poichè IC è di 6, resta CK di 7 $\frac{1}{2}$ che è la base straniera che si voleva sapere.

Ritrovata così questa base straniera, noi abbiamo da porre in esecuzione due regole d'intersecazione, e la prima sarà dei due triangoli KCM, MDO e la seconda dei due triangoli CKL, LBN de' quali si cerca la base DO e la base BN. Quindi per trovare la base DO si dica così. Tutto AP di 50 $\frac{5}{8}$ sta a tutto PQ di 23 $\frac{1}{2}$, come AH di 42 ad HO che si trova 19 $\frac{1}{2}$, e perchè tutto HD è di 43, così resta OD di 23 $\frac{1}{2}$. Saputo dunque le due basi DO, KC e la loro comune altezza essendo IH di 13, troveremo l'altezza del triangolo KCM, dicendo così. La somma 30 $\frac{5}{8}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 13 come la sola base KC di 7 $\frac{1}{2}$ alla sua altezza propria che si trova 3 presso a poco. Quindi moltiplicando la base KC per la metà dell'altezza, il prodotto 11 sarà la quadratura del primo triangolo straniero KCM.

Per trovare la base BN per la seconda intersecazione si dica così. Tutto AP di 50 $\frac{5}{8}$ sta a tutto PQ di 23 $\frac{1}{2}$, come AG di 6 a GN che si trova 2 $\frac{3}{4}$ circa e perchè tutto GB è di 28, così resta la base NB di 25 $\frac{1}{4}$. Conosciute così le due basi KC, BN e la loro comune altezza essendo GI di 23, ritroveremo l'altezza del triangolo LKC, dicendo così. La somma 32 $\frac{7}{8}$ delle

due basi parallele sta alla loro comune altezza 23 come la sola base KC di $7 \frac{1}{3}$ alla propria altezza che si trova $5 \frac{1}{3}$ circa. Quindi moltiplicando la base KC per la metà dell'altezza, il prodotto 19 presso a poco sarà la quadratura del triangolo straniero LKC. Unendo dunque la quadratura del primo e del secondo triangolo straniero, avremo la somma 30 che dinota la quantità dello straniero LCM e che perciò è mancante alla quantità 720 che si era tagliata e che si deve aggiungere alla medesima e rifare da capo l'operazione.

Per aggiungere alla quantità tagliata il mancante 30 possiamo servirci di due metodi. Se vogliamo servirci di AE istesso per lato di appoggio, in questo caso uniremo il mancante 30 alla quantità tagliata 720, e la somma 750 la torneremo a dividere per la metà di AE e ci serviremo della regola de' cateti. Ma se poi questo metodo non voglia praticarsi, in questo caso faremo uso della regola dell'ipotenusa e ci serviremo per lato di appoggio della stessa divisoria AQ nel modo che siegue. Poichè la divisoria AQ forma la ipotenusa del triangolo rettangolo APQ, del quale ci sono noti i due cateti AP di $50 \frac{5}{8}$ e PQ di $23 \frac{1}{2}$, così facendo i quadrati dei medesimi $2562 \frac{3}{4}$ circa e $552 \frac{1}{4}$, la loro somma 3115 sarà il quadrato della ipotenusa AQ; per cui estratta la radice 56 circa, questa darà la lunghezza della ipotenusa AQ, di cui ci serviremo per lato di appoggio. Diviso dunque il mancante 30 per 28 metà di AQ, il quoziente $1 \frac{1}{4}$ darà l'alzata perpendicolare dell'altro lato QR e la prossimamente vera divisoria AR per la parte di A. Il resto della figura diviso in due pezzi ABL, MDR che uniti insieme fanno 482, costituiscono la porzione di B come è manifesto.

Le intersezioni eseguite in questi problemi ci fanno conoscere che la seconda divisoria che si tira e forse anche la terza per una istessa operazione, taglia sempre un poco dello straniero il quale a rigore dovrebbe essere calcolato; per cui ad evitare il tedio del calcolo sogliono i Pratici aggiungere sempre un poco dippiù alla quantità mancante per supplire quel poco che nella seconda divisoria suole essere tagliato di straniero. Va regolato questo poco di più che si aggiunge, con la proporzione del 10 per 100 nei campi piani ed in proporzione un poco maggiori ne' campi assai disuguali di superficie. Intanto egli è da notarsi che nella esecuzione di ogni taglio che finora abbiamo fatto, le divisorie sono state linee tirate in una istessa direzione, e che noi diciamo CATENA LUNGA. Non così poi accade in altri

tagli che nel seguente esempio esporremo, mentre queste divisorie non possono tirarsi nella stessa direzione, ma debbano spezzare in due o tre luoghi; per cui diciamo CATENA SPEZZATA, poichè le sue porzioni non sono disposte nella medesima rettitudine. Con l'artificio della catena spezzata noi assegneremo con precisione esatta e perfetta il mancante che nasce nelle intersezioni mentre con la catena lunga si ha la sola approssimazione.

Fig. 67.

6. DIVIDERE UNA FIGURA NELLA QUALE ACCADE LA INTERSECAZIONE DE' PEZZI STRANIERI CONTENUTI NELLO SPAZIO DELLA MEDESIMA. Sia il parallelogrammo rettangolo RCED da dividersi in cinque porzioni dal punto divisorio A preso nello spazio. Poniamo ancora che in questo parallelogrammo vi sieno quattro pezzi stranieri, le cui quadrature non si debbano comprendere nella quadratura del parallelogrammo. Si faccia al solito la preparazione della figura col tirare le due linee de' quadranti FG, HI, le quali intersecandosi in A ad angoli retti dividono tutto il parallelogrammo in quattro pezzi minori, in ognuno de' quali vi è un pezzo straniero. Di ciascheduno de' quattro pezzi minori in cui resta diviso il parallelogrammo, si prenda la quadratura per notarsi dirimpetto, ma dalla medesima si deve prima tagliare la quadratura del pezzo straniero ivi contenuto acciocchè resti la quadratura netta delle quattro parti del parallelogrammo: Per ritrovare poi la quadratura de' quattro pezzi stranieri noi metteremo in opera la riduzione esterna a ciascheduno degli stranieri. Supponiamo già eseguito tutto questo e sottratta dalla quadratura di ogni pezzo del parallelogrammo la quadratura del suo straniero, resteranno le seguenti nette quadrature. Per AE sarà 864, per AD sarà 702, per AB sarà 531, per AC sarà 831 $\frac{1}{2}$, e che in tutto fanno la quadratura netta 2978 $\frac{1}{2}$ da dividersi in cinque porzioni, delle quali sia A di 364, B di 802, C di 720, D di 620 ed E di 472 $\frac{1}{2}$ e che sia AI il primo lato di appoggio comechè una delle quadranti.

Per dare ad A la parte 364 perchè dobbiamo servirci di AI per lato di appoggio, sarà IE quello d'incidenza; per cui divideremo 364 per 16 $\frac{1}{2}$ metà di AI, ed il quoziente 22 circa darà l'alzata IK, e tirata la linea AK, la medesima sarebbe la divisoria per A. Ora si avverta che questa divisoria stocca dal corpo straniero ivi contenuto il triangolo NCM, la cui quadratura viene a mancare alla porzione di A. Quindi sarà mestiere di calcolare questo pezzo triangolare straniero, facendo così. Il

lato MC si distenda sino in B e poi si dica. Tutta AI di 33 sta ad IK di 22 come AB di 27 a BM che si trova 18; e poichè BC è di 12, resta CM di 6. Ora per la intersecazione de' due triangoli opposti al vertice NMC. NAE sappiamo le due basi parallele AE di 12, CM di 6 e la loro comune altezza AB di 27; ritroveremo l'altezza propria del triangolo NMC, dicendo così. La somma 18 delle due basi parallele sta alla loro comune altezza AB di 27 come la sola base CM di 6 alla propria altezza che si trova 9. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 27 sarà la quadratura del triangolo straniero NMC.

Questa quadratura 27 calcolata per intersecazione è quella quantità che manca alla porzione di A di 364 che si è tagliata; perciò si deve aggiungere ed operare di nuovo. Per rimettere adunque alla porzione di A la quantità mancante, noi potremo farlo secondo il solito a catena lunga, o con servirci della regola de' cateti, o della regola della ipotenusa. Ma a catena lunga l'operazione non riesce esatissima a cagione di que' sottilissimi stranieri che risultano dalle replicate divisorie, e che come frazioni minime, si tralasciano. Quindi noi useremo un altro metodo sicurissimo ed esatto senza trascurare veruna frazione come poter aggiungere alla porzione di A il mancante 27, con far uso del metodo della catena spezzata e che si esegue per tutto questo problema nel modo seguente.

Poichè la divisoria AK tocca in N ed in M lo straniero, così noi della quantità mancante 27 ne faremo due porzioni regolate a proporzione e ne aggiungeremo una porzione sopra AN ed un'altra sopra MK. Sieno adunque le due porzioni 17 e 10, la prima delle quali si aggiungerà ad AN e l'altra ad MK. Per aggiungere la porzione 17 ad AN bisogna prima sapere la lunghezza interna EN e con essa PN, dicendo così. Tutto KI di 22 sta a tutto IA di 33 come KD di 10 a DN che si trova 15; e poichè tutto DE è di 33, sarà NE di 18 e quindi PN di 7. Ora moltiplicando la base EN per la metà dell'altezza EA, il prodotto 108 sarà la quadratura del triangolo ANE. E perchè dobbiamo aggiungere ad AN la porzione 17, così ci serviremo del taglio alla rovescia stoccando il residuo 91, servendoci di AE per lato di appoggio e di EN per lato d'incidenza. Diviso dunque 91 per 6 metà di AE il quoziente 15 $\frac{1}{6}$ darà EO e la

prima divisione AO per la porzione 17 contenuta nel triangolo AON.

Eseguita così la prima operazione, dovremo eseguire la seconda per l'altra porzione 10, aggiungendola ad MK. Per adattare questa porzione si calcoli prima il capotagliato rettangolo MGFK il quale, fatto il calcolo, si trova 18, e perchè ci bisognano soltanto 10 verso MK, così il residuo 8 lo stoccheremo alla rovescia servendoci di FG per lato di appoggio, e di GM per lato d'incidenza. Diviso dunque 8 per 3 metà di FG, il quoziente $2\frac{2}{3}$ darà GL, e la linea FL sarà l'altra divisoria per la porzione 10 contenuta da MLFK. Si vede ora che la divisoria spezzata AO, LF fa il confine della parte di A di $36\frac{1}{2}$, e resta del primo pezzo AE il residuo 500 il quale entra nella porzione seguente.

Per dare a B la sua parte 802 noi ne abbiamo nel primo pezzo un residuo 500; perciò il dippiù 302 lo dobbiamo tagliare dall'altro pezzo, servendoci di AG per lato di appoggio e di GD per lato d'incidenza. Diviso dunque 302 per 16 metà di AG, il quoziente $18\frac{7}{8}$ ossia 19 presso a poco darà GX; perciò la linea AX sarebbe la divisoria per B. Ora questa divisoria poichè taglia dello straniero ivi contenuto il triangolo PKB, il medesimo si deve calcolare come che mancante alla porzione tagliata e secondo il solito rifare l'operazione. Per calcolare il triangolo PKB noi abbiamo due triangoli opposti al vertice KB, OPV de' quali si debbano sapere le due basi parallele OV, KB per eseguire la regola della intersecazione. Per sapere KB si dica. Tutto AG di 32 sta a tutto GX di $18\frac{7}{8}$ come AK di 24 ad RK che si trova $14\frac{1}{8}$ circa; e poichè RB è di 6, resta la base BK di $8\frac{1}{8}$. Per sapere OV si dica. Tutto AG di 32 sta a tutto GX di $18\frac{7}{8}$ come AT di 12 a TV che si trova 7 presso a poco; e poichè TO è di 13, resta la base OV di 6. Sapute così le due basi parallele ed essendo la loro comune altezza TR di 14, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero PKB dicendo così. La somma $14\frac{1}{8}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 14 come la sola base KB alla propria altezza che sarà 8 circa. Quindi moltiplicando di questo triangolo straniero la base per la metà dell'altezza, il prodotto $32\frac{2}{3}$ sarà la sua quadratura la quale manca a 302 che si è tagliata ed alla quale si deve aggiungere nel modo seguente.

Questo mancante $32\frac{2}{3}$ che si deve aggiungere, noi lo faremo a catena spezzata dividendolo in due parti regolate a proporzione e sieno 20 e $12\frac{2}{3}$, aggiungendo la

prima ad AP e la seconda a KX. Per aggiungere e 20 ad AP si farà così. Dal punto P si tiri PS che calcolata si trova $10 \frac{1}{2}$ circa. Ritrovata questa, si faccia l'apparecchio angolare con allungare PB finchè si unisca col prolungamento di SG il quale si trova così. S'innalzi la perpendicolare BQ di 8 la quale taglia PS nel punto Q; perciò QP è di $4 \frac{1}{2}$. Si dica dunque. La parte PQ di $4 \frac{1}{2}$ sta alla parte QB di 8 come tutto PS di $10 \frac{1}{2}$ a tutto SG prolungato che si trova $18 \frac{1}{2}$. Ora il resto della base SA essendo 18, sarà tutto il lato AG prolungato di $36 \frac{1}{2}$ e l'altezza SP di $10 \frac{1}{2}$. Quindi di tutto il gran triangolo APG prolungato moltiplicando la base intera prolungata per la metà dell'altezza, il prodotto 192 $\frac{1}{2}$ sarà la sua quadratura. Ritrovato questo, si unisca al medesimo la prima porzione 20, ed avremo 212 $\frac{1}{2}$ il quale diviso per $18 \frac{1}{2}$ metà di tutto AG prolungato, il quoziente 11 $\frac{1}{2}$ darà l'alzata FS, la parallela FC, e la linea AC sarà la prima divisoria per 20 aggiunta ad AP.

Per aggiungere poi a KX l'altra porzione 12 $\frac{1}{2}$ si farà così. Essendo BK di $14 \frac{1}{2}$ e GX di $18 \frac{1}{2}$, sarà KY di $10 \frac{5}{8}$ e DX di $6 \frac{1}{8}$ e l'altezza DY di 7 del capotagliato DYKX; perciò usando le regole esposte ritroveremo 46 $\frac{5}{8}$ ovvero 47 circa la quadratura del medesimo capotagliato. E poichè dobbiamo adattare 12 $\frac{1}{2}$ verso KX, così noi taglieremo alla rovescia il residuo $34 \frac{1}{2}$, servendoci di DY per lato di appoggio e di YK per lato d'incidenza. Diviso dunque $34 \frac{1}{2}$ per $3 \frac{1}{2}$ metà di DY, il quoziente 9 $\frac{1}{2}$ darà l'alzata YL, e tirata DL, la medesima sarà la seconda divisoria per la parte che si doveva aggiungere. Si vede intanto che la divisoria spezzata AC, LD fa il confine della parte di B di 802, e resta di questo secondo pezzo il residuo 400 che fa parte della seguente porzione.

Per dare a C la parte 720 noi ne abbiamo 400 di residuo nel pezzo AD; perciò dobbiamo prenderne il dippiù 320 nell'altro pezzo AB, servendoci di AH per lato di appoggio e di HB per lato d'incidenza. Diviso adunque 320 per $12 \frac{1}{2}$ metà di AH, il quoziente 25 $\frac{1}{2}$ darà l'alzata HF, e tirata AF, la medesima sarebbe la divisoria per C. E poichè questa divisoria taglia del corpo straniero ivi contenuto il pezzo VDKO, il medesimo si deve calcolare per rifare l'operazione secondo il solito. Per calcolare questo pezzo straniero si tiri dal punto D la retta DT e dal punto F la retta FL, ed avremo così

l'intersecazione de' due triangoli al vertice VDM, VFL de' quali il triangolo VDM bisogna calcolare. Per calcolarlo si debbono sapere le due basi parallele FL, DM. Per sapere FL si dica. Tutto DG di 13 sta a tutto GI di 14 come DF di $11 \frac{2}{3}$ ad FL che si trova $12 \frac{1}{4}$ circa. Per sapere DM si dica. Tutto FH di $25 \frac{2}{3}$ sta ad HA di 25 come FD di $11 \frac{2}{3}$ a DM che si trova $11 \frac{1}{3}$ presso a poco. Sapute dunque le due basi parallele FL, DM ed essendo la loro comune altezza FD di $11 \frac{2}{3}$, calcoleremo l'altezza propria del triangolo VDM, dicendo così. La somma $23 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza $11 \frac{2}{3}$, come la sola base DM di $11 \frac{1}{3}$ alla sua propria altezza che sarà $5 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $29 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura del primo straniero VDM.

Fatto questo, dobbiamo calcolare l'altro pezzo DMOK al quale se uniremo il triangolo MOT che esce fuori, noi avremo tutto il triangolo DKT. Intanto calcoleremo prima il triangolo minore MOT che esce fuori, e poi tutto il triangolo DKT affinché sottraendo il minore dal maggiore, ci resti lo straniero solo che cerchiamo.

Per calcolare dunque il triangolo minore MOT che esce fuori, dobbiamo sapere le due basi parallele MT, KZ de' due triangoli opposti al vertice per quest'altra intersecazione. Per sapere MT si faccia così. Dal punto K s'innalzi la perpendicolare KR finchè s'incontri col prolungamento di LB sino ad R, e poi si dica. Il lato KR di 12 sta ad RB di 14 come KS di 8 ad ST che sarà $9 \frac{1}{3}$; e poichè SM è di $3 \frac{1}{3}$ come residuo di DM, così resta MT di 6. Inoltre per sapere la base KZ si dica così. La parte RS di 4 sta ad SM di $3 \frac{1}{3}$ come tutto RK di 12 a tutto KZ che sarà 9. Sapute ora le due basi parallele ed essendo la loro comune altezza DC di 8, ritroveremo l'altezza propria del triangolo MOT, dicendo così. La somma 15 delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 8 come la sola base MT di 6 alla propria altezza che si trova $3 \frac{1}{3}$. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 10 sarà la quadratura del piccolo triangolo MOT che esce fuori.

Trovato questo, ora dovremo ritrovare la quadratura di tutto il triangolo DKT e che si saprà così. Tutta la base DT è di $17 \frac{1}{3}$ secondo i calcoli antecedenti, e questa moltiplicata per 4 metà dell'altezza SK, il prodotto $69 \frac{1}{3}$ sarà la sua quadratura, dalla quale sottratto 10 del triangolo minore MOT, il residuo $59 \frac{1}{3}$

sarà la quadratura del pezzo DKOM. Unendo dunque questo pezzo $59 \frac{1}{2}$ con l'altro triangolo straniero VDM di $29 \frac{1}{2}$, la somma $88 \frac{1}{2}$ presso a poco sarà la quadratura di tutto lo straniero VDKO che manca alla quantità che per C si era tagliata e che si deve aggiungere secondo il solito a catena spezzata.

La quantità mancante $88 \frac{1}{2}$ la divideremo in due porzioni, applicandone 48 sul lato AO e poi $40 \frac{1}{2}$ sul lato VF. Per applicare 48 sul lato AO si distenda per KY, ed avremo il triangolo OYA, la cui altezza OS è di $10 \frac{1}{2}$, e la base AY si trova 24, calcolandola con abbassare da B la perpendicolare sopra SA, ed avremo 126 per quadratura del triangolo OYA che può stimarsi come un apparecchio angolare. A questo apparecchio unendo la prima porzione 48 avremo la somma 174, la quale divisa per 12 metà di AY, il quoziente $14 \frac{1}{2}$ darà l'alzata SN, la parallela NQ, e la linea AQ sarà la prima divisoria della prima porzione. Per adattare la seconda porzione $40 \frac{1}{2}$ a fianco di FV si faccia così. Si calcoli il triangolo FVD con trovare la perpendicolare EV che sarà $6 \frac{1}{3}$, la base DF che sarà $11 \frac{3}{5}$ e la sua quadratura $36 \frac{11}{15}$, alla quale unita $40 \frac{1}{2}$ avremo $77 \frac{1}{4}$ circa. Quindi diviso $77 \frac{1}{4}$ per 9 metà di BD, il quoziente $8 \frac{7}{10}$ darà l'alzata EX, la parallela XO, e la linea BO sarà la divisoria per la seconda porzione. Ora da tutto il pezzo AB di 581 essendosi levata la porzione di C, il residuo 261 serve per la seguente porzione.

Per dare a D la porzione 620 noi ne abbiamo 261 come residuo nel pezzo antecedente AB; per cui dobbiamo tagliarne il dippiù 359 dall'ultimo pezzo AC, servendoci di AF per lato di appoggio e di FC per quello d'incidenza. Diviso adunque 359 per 16 metà di AF, il quoziente $22 \frac{7}{16}$ darà l'alzata FG, e la linea AG sarebbe la divisoria per D. Ora perchè questa divisoria taglia del corpo straniero ivi contenuto la porzione NOHZ, la medesima si deve calcolare come mancante alla porzione tagliata e rifare l'operazione.

Per calcolare questo pezzo straniero si distenda GZ sino a T, ed avremo il triangolo straniero ZHT opposto al vertice col triangolo HML, de' quali seguendo la regola della intersecazione, bisogna calcolare il triangolo straniero con trovare le basi di ambidue. Per trovare ZT si dica così. Tutto AF di 32 sta a tutto FG di $22 \frac{1}{2}$ circa come AG di 17 a GT che sarà 12 circa, e perchè GZ è di 7, resterà ZT di 5. Per trovare la

base ML si dica. Tutto AE di 32 sta a tutto FG di $22 \frac{1}{2}$, come AD di 8 a DM che sarà $5 \frac{5}{8}$; e perchè DL è di 22, così sarà la base ML di $16 \frac{3}{8}$. Conosciute le due basi parallele ed essendo la loro comune altezza DG di 9, ritroveremo l'altezza propria del triangolo straniero, dicendo così. La somma $21 \frac{3}{8}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 9 come la sola base ZT di 5 alla propria altezza che sarà $2 \frac{1}{9}$ presso a poco. Moltiplicando adunque la base per la metà dell'altezza, il prodotto $5 \frac{1}{4}$ circa sarà la quadratura del triangolo straniero ZHT.

Per calcolare il resto dello straniero TZNO dal punto N si abbassi la perpendicolare NP che sarà 10 e che taglia di tutto ZT di 5 la parte PZ di 4; quindi è che moltiplicando la base PZ per la metà dell'altezza EN, il prodotto 20 sarà la quadratura dell'altro triangolo straniero NPZ, rimanendoci a calcolare il solo pezzo TPNO nel modo seguente. Il lato NP si distenda sino ad S e si calcoli tutto NS, facendo così. Si tiri HQ altezza di $2 \frac{1}{9}$ e si continui sino a B, ed avremo tutto HB di $17 \frac{1}{9}$, della quale si deve trovare la differenza BC dalla sua parallela CS, quale differenza per trovarla si tiri HE e poi si dica. Tutto AG di 17 sta a tutto GT di 12 come AE di $14 \frac{2}{3}$ ad EH che sarà $10 \frac{1}{3}$, circa; e perchè GP è di 11, così resta la differenza PQ di $\frac{1}{3}$. Inoltre essendo ora CG di $11 \frac{1}{2}$, si dica così. Tutto GB di 12 sta a tutto BH di $17 \frac{1}{9}$ come GC di $11 \frac{1}{2}$ a CS che sarà $16 \frac{2}{3}$; e perchè CP è di 15, resta PS di $1 \frac{2}{3}$ ed essendo PT di 1, il triangolo PST sarà di quadratura $\frac{7}{10}$, la quale si noti per sottrarla dalla quadratura del triangolo NSO che attualmente si cerca.

Abbiamo il triangolo straniero NSO, di cui sappiamo per ora la sola base NS di $11 \frac{2}{3}$, e questo essendo unito al vertice col triangolo GOM, abbiamo quest'altra intersecazione da risolvere, cercando l'altra base GM. Per ritrovarla si osservi che essendo FX di 5, resta XY di 2, ed essendo GL anche di 5, si cerca la porzioncina LM, dicendo così. Tutto NK di 15 sta ad XY di 2 come NL di $11 \frac{1}{2}$ ad LM che sarà $1 \frac{5}{6}$; per cui sarà tutto GM di $6 \frac{5}{6}$. Conosciute così le due basi parallele GM, NS ed essendo la loro comune altezza CG di $11 \frac{1}{2}$, dovremo cercare l'altezza OV, dicendo così. La somma $18 \frac{1}{6}$ circa delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 11 $\frac{1}{2}$ come la sola base NS di $11 \frac{2}{3}$ all'altezza VO che si trova $7 \frac{1}{3}$ circa. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto 41 sarà la quadratura di tutto lo straniero ONS

dal quale tolto via il triangoletto PST di $\frac{7}{10}$ o presso a poco 1, resta il dippiù 40 di TPNO. Ora riducendo tutti gli stranieri calcolati in una somma, avendo per NPZ la quantità 20, per ZHT la quantità $5\frac{1}{4}$ per TPNO la quantità 40, avremo per tutto ONZH la quantità $65\frac{1}{4}$, che esprime quello che manca alla quantità tagliata per D e che noi l'aggiungeremo secondo il solito a catena spezzata.

L'artificio usato per calcolare gli stranieri con le regole della intersecazione è uno di que' possibili mezzi che si possono mettere in pratica e che perciò non si esclude che si possono usare altri artifici per calcolare le stesse intersecazioni ed ottenere lo stesso risultato.

La quantità mancante calcolata $65\frac{1}{4}$ la divideremo in due porzioni, applicandone 40 ad AH ed il resto $25\frac{1}{4}$ ad OG. Per applicare 40 al lato AH si calcoli prima il triangolo AHE che sarà $78\frac{1}{8}$: dipoi HZ si distenda sino ad R, formando l'altro triangolo HER, di cui si deve calcolare la sola base ER per saperne la quadratura. Per calcolare dunque ER supponiamo che dal punto Z si abbassi sopra EH una perpendicolare che sarà $2\frac{1}{9}$, la quale taglia di tutto EH la porzione $3\frac{1}{2}$ verso H e la porzione 7 verso E. Ora si dica. La parte verso H di $3\frac{1}{2}$ sta alla perpendicolare $2\frac{1}{9}$ tirata da Z come tutto HE di $10\frac{1}{2}$ a tutto ER che sarà $6\frac{1}{3}$. Quindi moltiplicando la base per la metà dell'altezza, il prodotto $33\frac{1}{4}$ sarà la quadratura del triangolo HER, la quale unita alla quadratura del triangolo AHE, avremo la somma $111\frac{5}{12}$ per tutto il triangolo AHR che costituisce l'apparecchio angolare, la cui base intera AR si trova essere di $23\frac{1}{3}$ come è manifesto.

Eseguito così questo apparecchio, noi dobbiamo aggiungere ad AH la porzione 40; per cui unendo questa porzione all'apparecchio $111\frac{5}{12}$, avremo la somma $151\frac{5}{12}$, la quale divisa per $11\frac{2}{3}$ metà del lato di appoggio AR, il quoziente 13 circa darà l'alzata EI e tirata la parallela IK, la linea AK sarà la prima divisoria per la porzione 40.

Per applicare la seconda parte $25\frac{1}{4}$ al lato GO si faccia così. Si trovi la quadratura GOM e quella del capotagliato FGMY per avere tutto il pezzo GOYF. Per riguardo al triangolo GOM, sappiamo la base GM di $6\frac{5}{6}$ e la sua altezza $4\frac{3}{10}$ come residuo di OY; per cui moltiplicando l'una per la metà dell'altra, avremo per medesimo 15 di quadratura. Per riguardo del capotagliato sappiamo i due lati paralleli GM, FY, che presi insieme fanno $13\frac{5}{6}$ e sappiamo dippiù l'altezza GF di $3\frac{1}{2}$; per cui

moltiplicando la somma de' due lati paralleli per la metà dell'altezza, il prodotto $24 \frac{1}{3}$ sarà la sua quadratura. Ora unendo le due quadrature avremo in tutto $39 \frac{1}{3}$ per tutto GFYO. Ora poichè dobbiamo adattare a GO la quantità $25 \frac{1}{4}$, la taglieremo alla rovescia, stoccando il residuo 14 circa, servendoci di FY per lato di appoggio e di YO per lato d'incidenza. Dividendo dunque 14 per $3 \frac{1}{3}$ metà di FY, il quoziente 4 darà l'alzata YZ, e la linea FZ sarà la divisoria per la seconda porzione che si dovea adattare. Finalmente il resto del pezzo AC di $472 \frac{1}{4}$ sarà l'ultima porzione di E come è manifesto.

7. DATA UNA FIGURA, UNA DIVISORIA TRASVERSALE TRA DUE PARALLELE CHE CO'SUOI ESTREMI NON TOCCHI LE MEDESIME, SAPERE UNIRE LA TRASVERSALE CON LE PARALLELE CON TIRARE LO STRANIERO DA AMBE LE PARTI E POI CALCOLARLI. Sia il parallelogrammo rettangolo ABDC, nel quale vi sia tirata una divisoria trasversale GH la quale co'suoi estremi G ed H non tocchi gli estremi delle due parallele AB, CD, dalle quali in H è distante HB di 4 ed in G è distante GC di 5 . Si cerca ora di unire gli estremi della trasversale con gli estremi delle due parallele. Per eseguire questo problema la divisoria trasversale GH si allunghi in diretto da ambidue i suoi estremi per HF e per GE finchè si unisca negli estremi F ed E del prolungamento in diretto delle due parallele per BF e per CE, ed avremo in questo modo i due triangoli stranieri FBH, EGC, dei quali ci sono note solamente le altezze, essendo BH di 4 , GC di 5 . Si cerca ora di calcolare la base BF e la base CE per conoscerne le quadrature.

Per sapere BF si faccia così. Dal punto H si tiri HI uguale e parallela a BA e poi si dica. La parte GI di 9 sta ad IH di 24 come tutto GA di 13 a tutto AF che sarà $34 \frac{1}{3}$, e perchè AB è di 24 , resterà la base straniera BF di $10 \frac{2}{3}$. Moltiplicando dunque questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $21 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura del primo straniero FBH. Inoltre per sapere CE si faccia così. Dal punto G si tiri GK uguale e parallela a CD e poi si dica. La parte HK di 9 sta a KG di 24 come tutto HD di 14 a tutto DE che si trova $37 \frac{1}{3}$, e perchè DC è di 24 , resterà la base straniera CE di $13 \frac{1}{3}$. Quindi moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $32 \frac{1}{3}$ sarà la quadratura del secondo straniero EGC, e così sarà eseguito il problema.

Avvertasi intanto che se gli estremi H e G della trasversale fossero uniti con gli estremi B e C delle due pa-

rallele, allora il calcolo esposto non bisogna; ma se poi la trasversale con un solo estremo fosse unita ad una delle parallele e con l'altro disunito, in questo caso si farebbe l'unione ed il calcolo per quella sola parte dove si tira lo straniero. Questo problema si chiama *REGOLA DELLA ZETA*, giacchè con l'esecuzione del medesimo si forma questa lettera come si vede in *AFED* chiaramente.

8. DATA UNA FIGURA DISTINTA IN PIU' CORPI E DIVISA CON UNA TRASVERSALE, SAPERE CALCOLARE LE PORZIONI INTERSEGATE DI CIASCEDUN CORPO. Sia il trapezio *BCDEFG* distinto in cinque corpi *CBG*, *CQ*, *KR*, *LF*, *FDE*, i quali uniti insieme rappresentano e compongono tutto il dato trapezio il quale venga diviso con una trasversale *AS* in due porzioni comunque e la quale interseca tutti cinque i corpi. Si cerca di sapere calcolare quale quantità venga tagliata di ciascheduno de' cinque corpi a destra ed a sinistra della trasversale.

Fig. 69.

Per eseguire tutto questo egli fa di mestiere eseguire tre differenti operazioni. Consiste la prima nel trovare la quadratura distinta di tutti cinque i corpi per avere la intera quadratura del trapezio. La seconda richiede che da qualunque punto *A* si divida il trapezio con la trasversale *AS* secondo quella proporzione che si voglia. La terza finalmente eseguisce la regola della intersecazione per ognuno de' cinque corpi per conoscere la quantità tagliata di ciascheduno de' medesimi a destra ed a sinistra della divisoria trasversale.

Per riguardo alla prima operazione, con la quale si deve calcolare la distinta quadratura di ciascheduno de' cinque corpi sarà bene lo avvertire che siccome per conoscere la quadratura si deve usare la riduzione, così questa istessa si faccia sempre interna per evitare un maggior fastidio nel calcolo. Quindi essendo *A* il punto divisorio, si tirino le linee de' quadranti *HI*, *AE* che s'intersechino in *A* ad angoli retti. Dipoi dallo estremo *H* sino all'angolo *D* si tiri la linea di riduzione *HD* e dallo estremo *I* l'altra linea *IO* e che amendue queste linee di riduzione sieno parallele ad *AE* e perciò parallele tra loro. Finalmente da tutti gli estremi de' cinque corpi si abbassino le perpendicolari sopra le due parallele di riduzione, ed avremo *CR*, *KE*, *LI* e dall'altra parte *QB*, *RD*, *FK* e si misurino tutte queste perpendicolari e tutti gl'intervalli segnati sopra delle linee della riduzione. Fatto questo, sarà facile di calcolare la quadratura distinta di ogni corpo, ed avre-

mo così CBG di $345 \frac{1}{2}$, CQ di 611, KR di $672 \frac{1}{2}$, LF di $806 \frac{1}{2}$ e DEF di 285; onde sommando insieme queste distinte quadrature, il numero $2720 \frac{1}{2}$ sarà la quadratura totale di tutto il trapezio dato e distinto in cinque corpi.

Per riguardo alla seconda operazione che dal punto A questo quantitativo si deve dividere con una trasversale in due porzioni delle quali A abbia 1400, e B abbia il resto $1320 \frac{1}{2}$, si faccia così. Il triangolo GFO è di 180, il capotagliato AGOE è di 520 e che uniti insieme fanno 700; per cui gli altri 700 per A li dobbiamo prendere sopra AE, servendoci di questa per lato di appoggio e di ED per lato d'incidenza. Diviso adunque 700 per $29 \frac{1}{2}$ metà di AE, il quoziente $23 \frac{3}{4}$ sarà l'alzata ES, e perciò SA sarà la divisoria trasversale che divide la porzione di A dalla porzione di B.

Per riguardo alla terza operazione finalmente poichè la trasversale AS interseca tutti cinque i corpi, così si deve calcolare di ognuno quella porzione che resta nella parte di A e quanta ne resti nella parte di B. Per eseguirlo si osservi che la trasversale AS coi suoi estremi non si unisce con gli estremi delle due parallele di riduzione; per cui bisogna farli unire col prolungamento delle medesime e della trasversale ne' punti della unione M e T, mediante il quale nascono due stranieri MDS, TGA che bisogna calcolarli, e faremo uso così della regola della Zeta.

Per calcolare il primo straniero MDS si dovrà sapere la lunghezza DM, facendo così. Poichè DS è di $6 \frac{1}{4}$ come residuo di tutto DE, così dal punto S si concepisca tirata una linea verso P, ed indi si dica. Come AP di $23 \frac{3}{4}$ sta a PS di 59, così tutto AH di 30 a tutto HM che sarà $74 \frac{1}{2}$ presso a poco, dal quale tolto via HD di 59, resta DM di $15 \frac{1}{2}$. Ora moltiplicando la base DM per la metà dell'altezza DS, il prodotto 48 circa darà la quadratura del primo straniero BSM. Inoltre per trovare la base GT dell'altro straniero AGT si dica così. Come SE di $23 \frac{3}{4}$ sta ad EA di 59, così tutto SN di $33 \frac{3}{4}$ a tutto NT che si trova 84 circa, e perchè IN è di 59, resta IT di 25 e tutta la base TG di 28; per cui moltiplicando questa base per la metà dell'altezza AI, il prodotto 140 sarà la quadratura del secondo straniero AGT.

Eseguito tutto questo preparativo, si vuol sapere di tutto il primo corpo CBG quanta sia la parte intersecata AVG che rimane nella porzione di A. Per saperla noi abbiamo i due triangoli opposti al vertice TVG, QVM, dei

quali le due basi parallele sono note e la loro comune altezza HI anche è nota. Quindi risolveremo la prima intersecazione dicendo così. La somma $90 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele QM, TG sta alla loro comune altezza HI di 40 come la sola base TG di 28 alla sua propria altezza che si trova $12 \frac{1}{3}$ circa. Quindi moltiplicando la base TG per la metà dell'altezza ritrovata, il prodotto $172 \frac{2}{3}$ sarà la quadratura del triangolo TVG, dal quale tolto via lo straniero TAG di 140, il residuo $32 \frac{2}{3}$ sarà la porzione AVG, e poichè tutto il corpo CBG è di $345 \frac{1}{2}$, così sottraendo $32 \frac{2}{3}$ che cade nella parte di A, il resto $312 \frac{5}{6}$ sarà il dippiù che resta nella parte di B.

Per sapere il quantitativo GVXQ del secondo corpo si faccia così. S'includa con questo tutto l'antecedente triangolo VTG ed avremo due triangoli opposti al vertice TXC, SXM, de' quali le due basi parallele TC, SM sono note e nota ancora la loro comune altezza HI. Si dica dunque. La somma $87 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40 come la sola base TC di 39 alla sua propria altezza che si trova 18 presso a poco. Quindi moltiplicando la base TC per 9 metà dell'altezza, il prodotto 351 sarà la quadratura del triangolo TXC, dal quale tolto via TVG, ci resta $178 \frac{1}{3}$ per VGCX, ed aggiungendo a questo ultimo il triangoletto GQC di 11, la somma $189 \frac{1}{3}$ sarà la porzione GVXQ. Ora essendo tutto il corpo CQ di 611, così tolto via $189 \frac{1}{3}$ che cade nella parte di A, il resto $421 \frac{2}{3}$ sarà quello che rimane nella porzione di B.

Per sapere il quantitativo QXYR del terzo corpo si faccia così. S'includa a questo l'antecedente triangolo TXC, ed avremo due triangoli opposti al vertice TYH, BYM de' quali le due basi parallele TH, BM sono note e nota altresì la loro comune altezza HI. Si dica dunque. La somma $87 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40 come la sola base TH di 53 alla propria altezza che sarà $24 \frac{1}{4}$ presso a poco. Quindi moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $642 \frac{5}{8}$ sarà la quadratura del triangolo TYH, dal quale tolto via il triangolo TXC di 351, il resto $291 \frac{5}{8}$ sarà il pezzo XGHIY ed al quale aggiunto il pezzo CQRH di $49 \frac{1}{2}$, la somma $341 \frac{1}{8}$ sarà la porzione che resta nella parte di A, ed essendo tutto il corpo KR di $672 \frac{1}{2}$, il resto $331 \frac{5}{8}$ sarà poi quello che rimane nella porzione di B.

Per sapere il quantitativo YRFZ del quarto corpo si faccia così. S'includa a questo l'antecedente triangolo TYH

ed avremo due triangoli opposti al vertice TZL, DZM, de' quali le due basi parallele TL, DM sono nate e l'altezza comune HI anche nota. Si dica dunque. La somma $83 \frac{1}{2}$ delle due basi parallele sta alla loro comune altezza 40 come la sola base TL di 68 alla propria altezza che si trova $32 \frac{1}{2}$ circa. Quindi moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto 1105 sarà la quadratura del triangolo TZL, dal quale tolto via il triangolo TYH di $642 \frac{5}{8}$ il residuo $462 \frac{3}{8}$ sarà il pezzo YHLZ ed al quale aggiunto HRFL di 98, la somma $560 \frac{3}{8}$ sarà la porzione che rimane nella parte di A, e perchè tutto il corpo LF è di $806 \frac{1}{2}$ il residuo $246 \frac{1}{8}$ sarà il dippiù che resta nella parte di B.

Finalmente per sapere il quantitativo ZSEF del quinto corpo intersecato, essendo questa porzione molto più grande del suo residuo DZF così noi questo residuo calcoleremo. Essendo l'altezza del triangolo DZM solamente $7 \frac{1}{2}$ come residuo dell'altezza del suo triangolo opposto al vertice TZL ed essendo la base DM di $15 \frac{1}{2}$, così moltiplicando questa base per la metà dell'altezza, il prodotto $58 \frac{1}{4}$ sarà la quadratura del triangolo DZM, dal quale tolto via lo straniero DSM di 48, resterà il triangolo DZS di $10 \frac{1}{4}$ che resta nella parte di B, ed essendo tutto DEF di 285, il dippiù $274 \frac{3}{4}$ sarà quello che rimane nella parte di A come è chiaro a capirsi.

L'esecuzione dell'esposto problema si dice REGOLA DEGLI AFFITTI perchè alle volte accade che più corpi di padroni diversi uniti e componenti un sol territorio si dia poi ad affitto a due persone, le quali si dividono il territorio in due porzioni comunque, ed allora bisognerà che ciascheduno padrone de' corpi particolari sappia quanto debba riscuotere a proporzione dell'una e dell'altra persona che si hanno affittato il territorio e se lo hanno diviso.



CAPO II.

LA LIVELLAZIONE

§. I.

INTRODUZIONE

LA LIVELLAZIONE è quella pratica geometrica la quale espone le regole onde possiamo conoscere di quanto un punto della superficie terrestre sia più alto di un altro o della superficie del mare ovvero de' laghi giacchè l'acqua sempre dinota la parte più bassa del territorio circconvicino. Questa determinazione è necessaria quando vogliamo condurre l'acqua da un luogo in un altro. Dippiù serve la livellazione per fare i profili de' terreni per conoscere la loro ineguaglianza e così servircene secondo il bisogno.

Si dicono due punti essere di LIVELLO VERO se sieno ugualmente distanti dal centro della terra ed essere poi di LIVELLO APPARENTE quando sebbene non abbiano una eguale distanza dal centro della terra, sono però in una medesima linea retta. Quindi avviene che relativamente alla terrestre superficie si dirà LINEA O SUPERFICIE DI LIVELLO VERO quella linea o superficie che passa per que' punti che sono nel vero livello, e si dice poi LINEA O SUPERFICIE DI LIVELLO APPARENTE quella linea o superficie che passa per que' punti che sono nel livello apparente.

Da questo principio siegue che relativamente alla superficie della terra sarà linea di livello vero ogni circonferenza di cerchio massimo o un arco del medesimo che passa pe' punti visuali e che avrà il centro comune con la terra; e sarà linea di livello apparente una linea retta tangente in un punto la linea di livello vero. Similmente sarà superficie di livello vero la superficie sferica della terra o una sua porzione, e sarà poi superficie di livello apparente un piano tangente in un punto la superficie sferica. E poichè la superficie del mare o di qualsivoglia altro accumulo di acque tranquille per una nota legge

della idrostatica mettendosi in equilibrio dispongono tutt' i punti della loro superficie ad una ugual distanza dal centro della terra, così ne viene in conseguenza che la superficie del liquido tranquillo sarà sempre disposta nella situazione del vero livello.

Fig. 1.

Non così accade ne' piani della superficie della terra nuda poichè la medesima essendo interrotta da monti, colline e valli, perciò il suo livello è per lo più apparente. Quindi avviene che rappresentando NLA una porzione della terra ed O il suo centro, la linea o piano NLA sarà nel livello vero e la retta RLM nel livello apparente. E se dal centro O tiriamo più linee OC, OE, OG alla linea di livello apparente, le porzioni BC, DE, FG comprese tra l'arco del livello vero e la linea del livello apparente si dicono DIFFERENZE DEL LIVELLO VERO DAL LIVELLO APPARENTE.

Poichè ogni circonferenza di cerchio è divisa in 360 gradi ed essendo un grado di cerchio massimo della terra diviso in 60 miglia Italiane, perciò corrisponderà un solo miglio ad un sol minuto primo dell'arco della circonferenza. Quindi sia LB un arco di un minuto primo corrispondente ad un miglio nel sito del livello vero, e sia LC un miglio nel sito del livello apparente. In questa posizione egli è evidente che il punto B del livello vero sia al di sotto del punto C del livello apparente per quanto è l'intervallo CB ossia la differenza tra i due livelli alla distanza di un miglio dal punto L. Ora si cerca di sapere la differenza CB tra i due livelli quanta sia in misura.

Per calcolare in misura la differenza CB egli è a considerarsi che il semidiametro OL della terra è di miglia 3436. e perchè ogni miglio è di 7000 palmi, perciò il semidiametro OL sarà di 24052000 palmi, ed essendo LC linea del livello apparente lunga un solo miglio, perciò questo sarà di 7000 palmi. Adunque nel triangolo rettangolo OLC conoscendo il cateto OL di 24052000 palmi ed il cateto LC di 7000 palmi, ed essendo il quadrato del primo 578598704000000, ed il quadrato del secondo 49000000, i quali sommati insieme, la somma 578598753000000 sarà il quadrato della ipotenusa OC. Ora se da questo quadrato della ipotenusa OC. Ora se da questo quadrato della ipotenusa se ne estraiga la sua radice, questa sarà 24052001 palmi e $\frac{895999}{8104000}$ di palmo. E poichè OB è di 24052000 palmi, comechè eguale ad OL, resta la differenza BC di 1 palmo e $\frac{895999}{8104000}$ di palmo. Questa frazione valutata si trova di 2 pollici e 2 linee. Adunque la differenza BC

tra i due livelli è di 1 palmo, 2 pollici e 2 linee per la lunghezza di un miglio dal punto L del contatto. Di qui siegue che nelle distanze minori di un miglio la differenza essendo ancora minore, si potranno stimare i due livelli vero ed apparente che sieno, senza error sensibile giacenti nell'istessa linea; ma quando poi la distanza fosse maggiore di un miglio, allora bisognerà sempre tener conto della differenza de' livelli.

Due specie di livelle usano i pratici; la prima è quella che si compone da una riga lunga circa 10 palmi e che si pone in sito orizzontale mediante l'archipensolo o sia livello a piombo, e l'altra è la livella ad acqua che qui descriveremo. La prima specie di livella si usa nelle minime distanze e la seconda nelle lunghe, e così saremo sicuri di non errare quante volte ci bisogna la vera livellazione.

Fig. 2.

Il livello ad acqua si compone così. Rappresenti ABCD un cilindro metallico vuoto e piegato ad angoli retti nelle estremità AB, DC. La grossezza di questo sia di circa un pollice e la lunghezza di 4 palmi circa. Agli orificii A e D si adattano due vasi cilindrici di cristallo E ed F che sieno di ugual diametro tra loro. Si riempia lo strumento con acqua colorata sino all'altezza F che salirà nell'altro estremo sino ad E. Finalmente si adatti la livella talmente sul ginocchio L che possa girarsi sul medesimo secondo il bisogno. Tutto questo strumento sarà alto circa 5 palmi affinchè un uomo all'impiedi possa servirsene.

Dalla costruzione dello strumento istesso si scorge chiaro che l'acqua della livella traguadata per la linea visuale FE tangente le due superficie dell'acqua, le medesime superficie sono a rigore geometrico nella linea di livello vero, giacchè le due superficie dell'acqua avranno l'eguale distanza dal centro della terra, e perciò la linea che si adatterebbe da E in F, sarebbe un arco e non una linea retta. Ora essendo così, se facciamo il paragone tra il livello ad acqua ed il livello con la riga ed archipensolo, vedremo che la linea visuale della livella ad acqua sia nel livello vero perchè conformata ad arco di cerchio massimo, e la linea o sia direzione della seconda livella è una retta tangente la superficie terrestre che è nel livello apparente; quindi noi diremo LIVELLA VERA la livella ad acqua, e diremo LIVELLA APPARENTE quella fatta con l'archipensolo, scavendoci la prima nelle distanze lunghe e la seconda nelle brevi.

I P R O B L L M I.

1. CONOSCERE DI QUANTO UN PUNTO DI TERRENO SIA PIÙ ALTO DEL PIANO SOTTOPOSTO O DELLA SUPERFICIE DEL MARE O LAGO, E QUESTO CON UNA OPERAZIONE. Sia il filo del terreno inclinato AE del quale si cerca di quanto il punto A sia più alto del punto E espresso per la quantità AB poichè supponiamo che il filo di questo terreno sia lungo assai ed il punto A non molto elevato; perciò in questa operazione faremo uso della livella ad acqua. Si ponga la livella C nel punto A, mentrechè in E vi eriga a perpendicolo un'asta tanto lunga finchè la linea visuale della livellazione CD incontri un segno bianco D posto verso l'estremo dell'asta. Si misuri poi la lunghezza DE e sia di 8 palmi. Da questa sottratto 5 per l'altezza della livella C, il residuo 3 darà l'altezza AB del livello ossia l'elevazione del punto A relativamente al punto E.

Fig. 3.

2. CONOSCERE DI QUANTO UN PUNTO DI TERRENO SIA PIÙ ALTO DEL PIANO SOTTOPOSTO CON DUE OPERAZIONI. Sia da livellarsi il filo del terreno inclinato AEH e supponiamo che adoperando la medesima livella ad acqua, non possa misurarsi con una sola operazione, ma che ne dobbiamo eseguire due di queste operazioni, dovendo ancora determinare il punto intermedio E relativamente al punto più alto A ed al punto più basso H. In questo caso si faccia così. S'innalzi dal punto H l'asta perpendicolare HI fregiata col solito segno bianco, e si ponga la livella ad acqua nel punto G in modo che la linea visuale EI tocchi da un lato il punto E che si cerca di determinare dall'altro lato il segno I. Fatto questo, si misuri IH e sia di 9 palmi e si noti nella corrispondente sua uguale FB. Dipoi nel punto E s'innalzi la solita asta perpendicolare ED e si ponga in A la livella ad acqua C, e si veggia il punto D determinato dalla visuale CD e si misuri DE e sia di 8 palmi. Ora da DE di 8 tolto via 5 che è l'altezza della livella C, il residuo 3 indicherà l'elevazione maggiore del punto A relativamente al punto intermedio E. Questo residuo 3 viene espresso da AF, il quale sommato con FB di 9, la somma AB di 12 darà l'elevazione del punto A relativamente al punto H. Avremo dunque il punto A più

Fig. 4.

elevato di 3 palmi del punto E e questo più elevato di 9 palmi dal punto H e perciò il punto A elevato di 12 palmi relativamente al punto H.

3. CONOSCERE DI QUANTO UN PUNTO DI TERRENO SIA PIÙ ALTO DEL PIANO SOTTOPOSTO, USANDO LA LIVELLA A PIOMBO CON MOLTE OPERAZIONI. Sia da prendersi il livello dal punto A del terreno inclinato AC relativamente al punto C, e supponiamo di eseguirlo con la livella fatta dalla riga e con l'archipenzolo. Si adatti al punto K la riga KG in modo che con l'archipenzolo si renda parallela all'orizzonte, ponendo un sostegno al di sotto di G, ed indi si misuri GC e sia 5 e che si noti nella corrispondente sua uguale NB. Dipoi si adatti in I la riga IF e facendola con l'archipenzolo parallela all'orizzonte, si misuri FK e sia 4 e che si noti nella corrispondente sua uguale MN. Operando nel modo istesso nel punto H si misuri EI e sia 6 e si noti in LM. Finalmente si adatti nel punto A la riga con l'istesso meccanismo, si misuri DI e sia 7 e si noti nella corrispondente AL. Eseguito questo, si sommino tutte le parti comprese in AB, e la somma 22 darà l'elevazione precisa del punto A relativamente al punto C.

4. CONOSCERE QUANTA ELEVAZIONE ABBIANO DUE PUNTI DIVERSI DI TERRENO DAL PIANO SOTTOPOSTO E LA LORO DIFFERENZA. Sia il terreno inuguale ABC formante una valle, di cui si voglia sapere l'elevazione di A e di C relativamente al punto B ed indi di quanto A sia più alto di C e che costituisca la loro differenza.

Per eseguire tutto questo si faccia così. Nel punto più basso B si ponga la livella ad acqua OB, e traguardando da O la linea orizzontale OI, si noti il punto I, e misurando l'altezza della livella che è 5, avremo la prima parte FG, ovvero PH, nella quale si noti. Dipoi nel punto I si eriga l'asta perpendicolare IE finchè con la livella posta in G si abbia l'altezza EI la quale traguadata per la visuale DEM, fisseremo il punto M corrispondente ad N. Misurata EI, sia di 8 e che si noti in NP, questa è uguale a DF, ma da questa tolto 5 dell'altezza della livella D, il residuo 3 darà la lunghezza CF e che si noti nella medesima. Ora la somma di CF con FG essendo 8, questo indicherà l'elevazione del punto C relativamente al punto B espressa per tutta GC. Inoltre nel punto M s'innalzi l'asta perpendicolare LM e con la livella K si determini l'altezza LM e sia di 9, dalla quale

sottratto 5 per l'altezza della livella, il residuo 4 darà la lunghezza AN, nella quale si noti. Quindi la somma di AN con NF e con PH essendo 17, questa dimostrerà l'elevazione del punto A relativamente al punto B espressa per AH. Finalmente per avere la differenza di elevazione tra i due punti A e C si sottragga la minore altezza CG di 8 dalla maggiore AH di 17, ed il residuo 9 darà la differenza di elevazione che ha il punto più alto A relativamente al punto meno elevato C.

5. DATA L'INCLINAZIONE DI UN TERRENO, SAPER' CALCOLARE IN MISURA LA LUNGHEZZA DELLA BASE ORIZZONTALE

Fig. 5. ALLA QUALE CORRISPONDE. Sia un terreno inclinato AC. Poichè il punto A corrisponde a perpendicolo al punto B, perciò la lunghezza maggiore del lato inclinato AC corrisponderà alla base orizzontale più corta BC. E poichè non possiamo con l'effettiva misura sapere la lunghezza di questa base BC per la pienza del terreno, perciò noi la calcoleremo, facendo così. Si adatti al punto K una riga lunga, la quale con l'artificio dell'archipenzolo si ponga nel sito orizzontale, ma in modo che un suo punto G corrisponda a perpendicolo al punto estremo C e l'estremo K corrisponda a Q. Si misuri KG e sia di 20 palmi, i quali si notino nella corrispondente porzione QC della base. Dipoi al punto I si adatti la riga con lo stesso artificio in modo che l'estremo I corrisponda a P ed il punto F corrisponda a Q e misurata FI, sia di 18, i quali si notino nella corrispondente porzione PQ della base. Inoltre al punto H si adatti la riga, disponendola in sito orizzontale ed in modo che l'estremo H corrisponda ad O ed il punto E corrisponda a P e misurata EH, sia di 30, i quali si notino nella corrispondente parte OP della base. Finalmente nel punto A corrispondente a B si adatti orizzontalmente la riga, la quale abbia il punto D corrispondente al punto O della base, e misurata AD, sia di 22, i quali si notino nella sua parte corrispondente BO della base. Fatto questo, si sommino tutte le parti comprese nella lunghezza BC che è il risultato di AD, HE, IF, KG, e la somma 90 darà in misure la lunghezza orizzontale BC della base corrispondente alla inclinazione AC del terreno.

6. LIVELLARE I DIVERSI PUNTI DI UN TERRENO, MISURARE LA LUNGHEZZA DELLA BASE PIANA CORRISPONDENTE E FARE IL PROFILO PE' L' DISEGNO. Essendo la superficie del terreno sempre disuguale, ondeggiante e giammai esattamente parallela all'orizzonte, perciò ne siegue che i

diversi punti della sua superficie non sieno tra loro nel vero livello. Quindi sarà indispensabile di conoscere tutti siffatti punti a quanta maggiore o minore elevazione sieno posti relativamente al piano della base orizzontale sottoposta e la differenza di elevazione che abbiano tra loro. Dippiù dovremo sapere la lunghezza di questa base piana orizzontale corrispondente alla superficie irregolare del terreno. E finalmente dopo di aver conosciuto in misure queste diverse elevazioni e la lunghezza della base piana, se si supponga di fare un taglio perpendicolare alla base istessa, la sezione rappresenterà la linea irregolare della superficie di questo terreno, e dovrà poi questa rappresentarsi in disegno e formare così il profilo del terreno.

Di qui siegue che queste tre diverse operazioni nascono l'una dall'altra e perciò siffatto problema è da riguardarsi diviso in tre parti. Nella prima vedremo il meccanismo di livellare il terreno, nella seconda conosceremo la lunghezza della base piana orizzontale che gli corrisponde, e finalmente nella terza faremo il profilo del territorio per rappresentarlo in disegno.

6. 7. In quanto alla prima operazione, sia da livellarsi il terreno disuguale AFI sopraggiacente alla base piana orizzontale AR. Incominceremo dal punto A il più basso ed a misura che avanzaeremo nella operazione, così segneremo ogni cosa nello sbizzo. Essendo in A noteremo due punti i più osservabili B e C. In B porremo la livella ad acqua in modo che la linea visuale SC tocchi il punto notato C da un lato e dall'altro lato tocchi il segno S nell'asta perpendicolare innalzata da A. Indi si misuri SA e sia di 9, e perchè CL è uguale ad SA; sarà anche CL di 9, e perchè la livella è alta di 5, sarà l'altezza KB di 4 del punto B. Questi risultati si notino nello sbizzo. Pervenuto in C, osserveremo due altri punti notabili D ed E. Quindi in C s'innalzi l'asta perpendicolare CV ed in D si ponga la livella XD in maniera che da un lato la linea visuale VE tocchi il punto E e dall'altro lato tocchi il segno V dell'asta. Si misuri VC e sia di 8; ma perchè EN è uguale a VL, sarà perciò EN di 17, e perchè la livella X è alta 5, sarà l'altezza MD di 12. Tutte queste misure si notino nelle linee dello sbizzo. Inoltre nel punto E si eriga l'asta solita perpendicolare ed in G come un altro punto notabile, si eriga un'altra asta perpendicolare, mentrechè nel punto intermedio F più alto di questi due

si ponga la livella Z. Notati i punti Y ed A determinati dalla visuale YA, si misuri YE e sia di 7, e misurata AG, sia di 10 mentrechè è di 5 l'altezza della livella Z. Quindi il punto E avrà di elevazione NE dalla base piana orizzontale la misura 17, il punto F avrà di elevazione OF di 19 ed il punto G avrà di elevazione PG di 14 e tutti siffatti numeri si notino nello schizzo. Finalmente pervenuto in G, si eriga l'asta perpendicolare GA, ed osservando un punto notabile H ed il punto estremo I, si ponga in H la livella B ed in I l'asta perpendicolare IC in modo che la linea visuale GC tocchi da un lato il punto G e dall'altro lato il segno C ed indi si misuri IC e sia di 6 mentre è di 5 l'altezza della livella B. Di qui siegue che il punto I avrà di elevazione RI di 8 dal piano della base orizzontale ed il punto H avrà di elevazione QH di 9, e tutti questi numeri si notino nelle linee dello schizzo.

Essendosi percorsa tutta la linea livellata del terreno dall'estremo A sino all'estremo I, si conoscerà l'elevazione di tutti i punti dalla base piana AR e la differenza di elevazione tra i medesimi punti. Quindi sarà il punto A più basso di tutti, il punto B sarà più elevato di 4 e questo sarà superato dal punto C per 5, il punto D più elevato di C per 3, ma è più depresso di E per 5, il punto F il massimo elevato supera E per 2 e G per 5. Questo punto G supera in elevazione il punto H per 5 e questo supera il punto I per 1. Adunque l'estremo punto I è più elevato dell'estremo A per 8 ed il punto massimamente elevato F supera l'estremo I per 11 e supera l'altro estremo A per 19 come è manifesto.

In quanto alla seconda operazione che è quella di sapere in misure la lunghezza della base piana orizzontale AR corrispondente alla linea disuguale livellata sovrapiacente, noi ci serviremo dalla pratica del problema antecedente con prendere il livello con la riga e con l'archipenzolo di tutti gl'intervalli inclinati tra i punti già livellati. Quindi livellando con la livella a piombo l'intervallo inclinato AB troveremo 20 per la lunghezza orizzontale AK, livellando l'altro intervallo inclinato BC troveremo 30 per KL, livellando CD troveremo 42 per LM; livellando DE troveremo 28 per MN, livellando EF troveremo 26 per NO, livellando FG troveremo 30 per OP, livellando GH troveremo 32 per PQ e livellando HI troveremo 16 per QR. Ora la somma 224 di tutte le parti comprese nella intera linea

AR indicherà la base piana orizzontale corrispondente alla linea irregolare AFI sopraggiacente.

Finalmente per la terza operazione che è quella di rappresentare in disegno il profilo del terreno livellato, egli è facile ad eseguirlo per le due antecedenti operazioni. Si stabilisca la intera base piana orizzontale AR tanto lunga per quanto si è trovata col calcolo. Questa si divida nelle porzioni già notate AK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ, QR ciascuna lunga quanto si è trovata: indi nei punti delle parti si erigano le perpendicolari KB, LC, MD, NE, OF, PG, QH, RI ciascuna lunga quanto si è calcolata, ed avremo così determinata la posizione de' punti A, B, C, D, E, F, G, H, I. Ora tirando per questi punti la linea irregolare, questa rappresenterà il profilo del terreno che si volea disegnare.

FINE DEL SECONDO ED ULTIMO TOMO.

602772





INDICE

Delle materie contenute nel secondo volume.



C A P O 1.

La Geodesia.

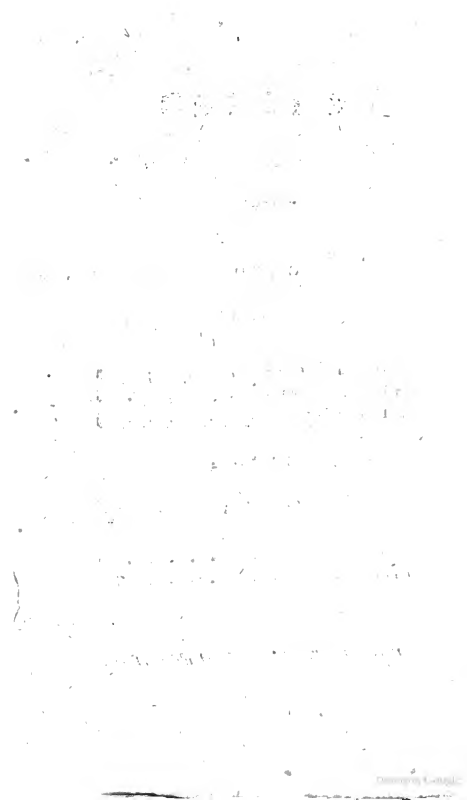
La Divisione Ordinaria	pag. 3
La Divisione straordinaria	66
La Intersecazione	79

C A P O 2.

La Livellazione.

Introduzione	101
I Problemi.	104

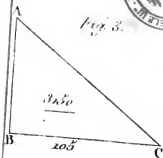
Fine dell' indice del secondo ed ultimo Tomo.





TAV. I.

Fig. 3.



4.

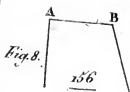


Fig. 8.

Fig. 9.





Totale 968

A — 300

B — 210

C — 240

D — 218

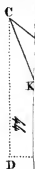
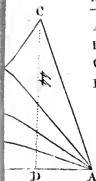
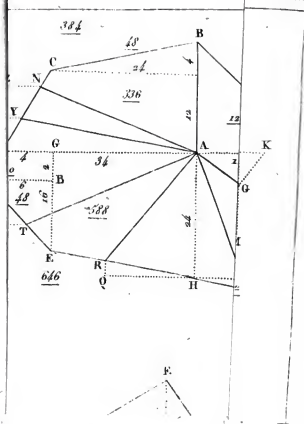
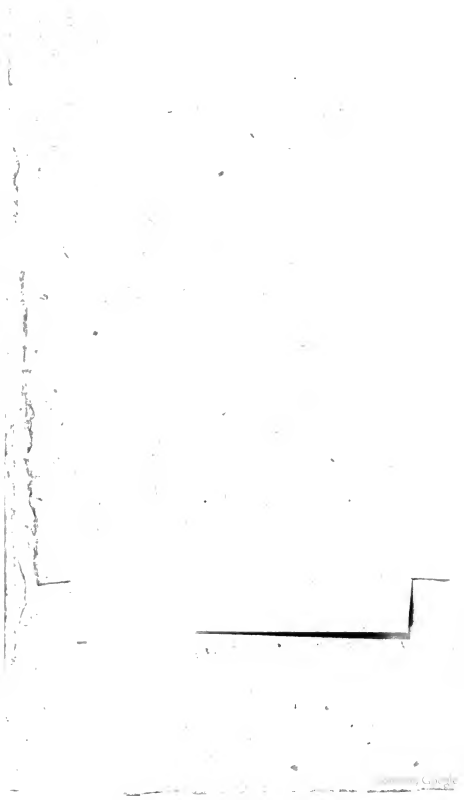


Fig. 22.



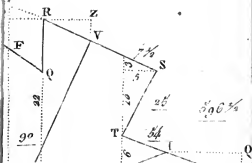


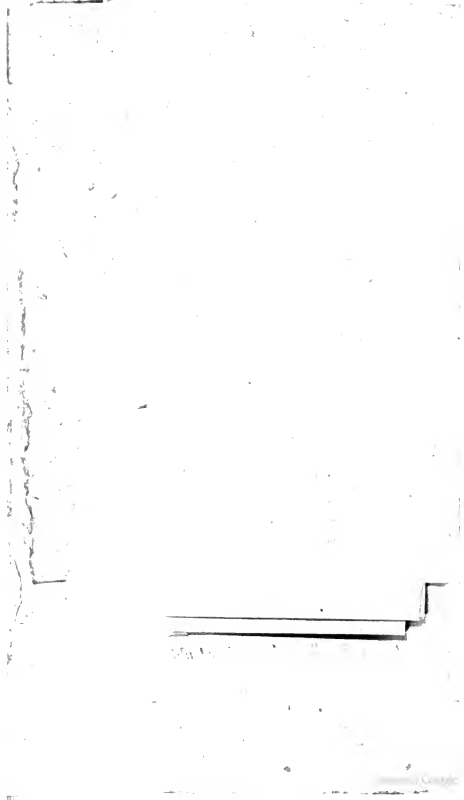




V.

Fig. 51.







TAV. V.

Fig. 34.

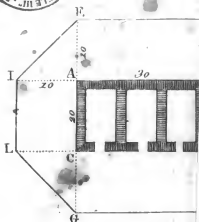
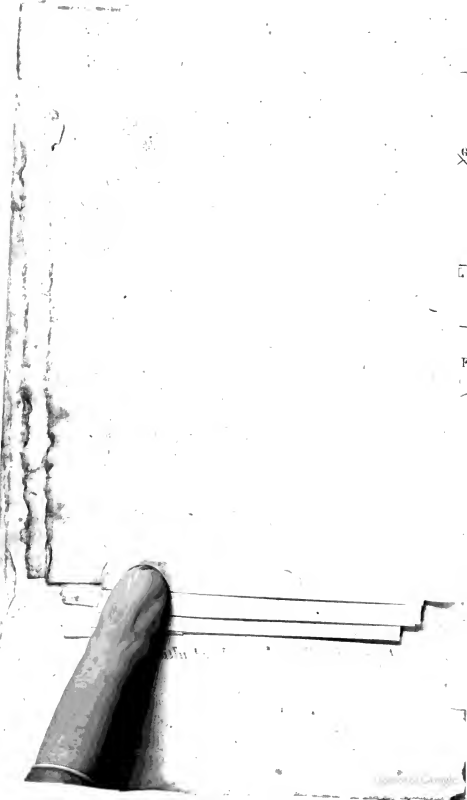
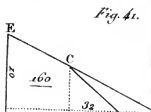
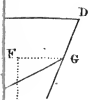
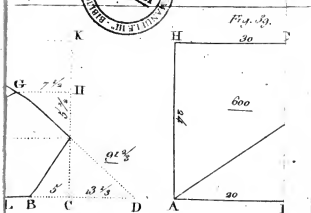
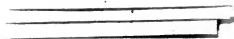


Fig. 35.

08









A

48.9.2304

E

D

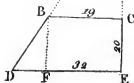
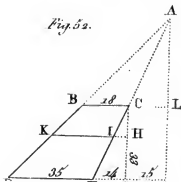
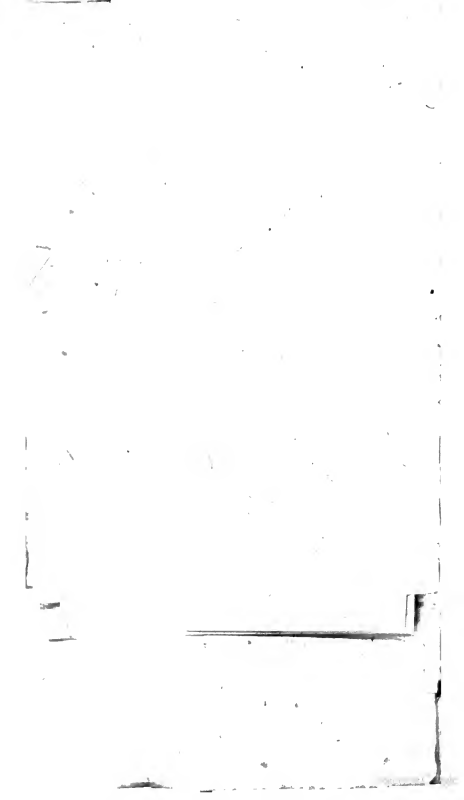


Fig. 4



Fig. 52.





Totale ... 2828

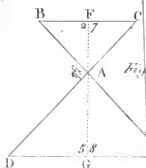
A ... 570

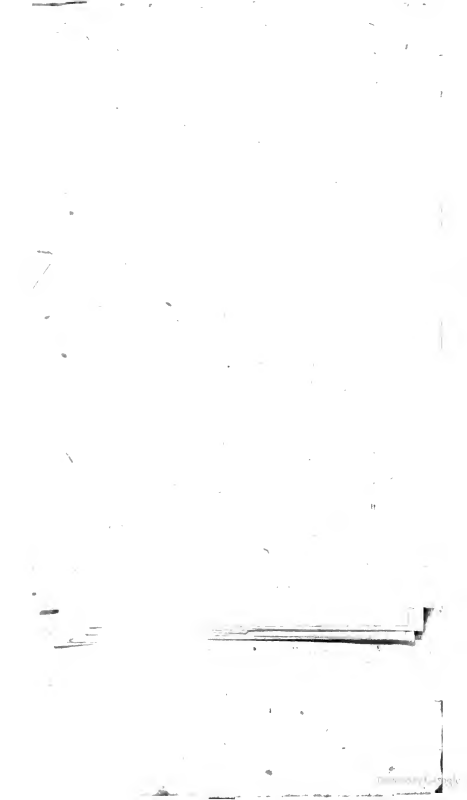
B ... 688

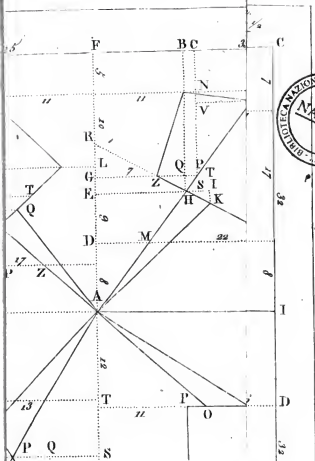
C ... 570

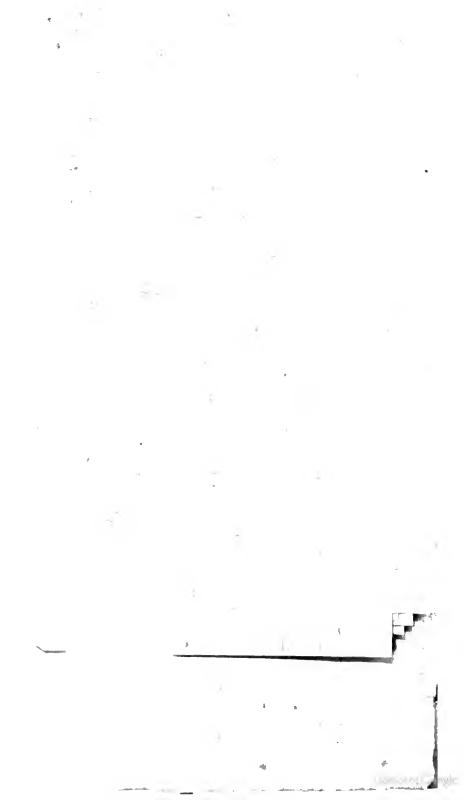
B D ... 500

E ... 500











A LIVELLAZIONE

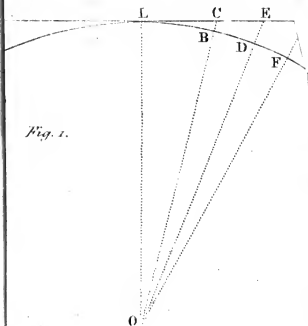


Fig. 1.





D

H



O





